УДК 512.64+514.12
ББК 22.143+22.151.5
Г 27

Геворкян П. С. **Высшая математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 208 с. — ISBN 978-5-9221-0860-7.

Данная книга вместе с двумя другим книгами автора, изданными под названиями «Высшая математика. Основы математического анализа» и «Высшая математика. Кратные интегралы. Ряды. Дифференциальные уравнения. ТФКП», охватывают весь комплекс вопросов, которые изучаются в рамках курса «Высшая математика» для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений.

Книга посвящена основам линейной алгебры и аналитической геометрии и содержит следующие разделы: матрицы и определители, системы линейных уравнений, элементы векторной алгебры, прямые и плоскости, кривые и поверхности второго порядка, линейные пространства и линейные операторы.

Автор стремился изложить материал по возможности полно, строго и доступно, преследуя цель не просто сообщить те или иные сведения по высшей математике, а вызвать у студентов интерес к математике, расширить их кругозор и привить им математическую культуру.

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям в области экономики и управления, техники и технологии.

ISBN 978-5-9221-0860-7

© ФИЗМАТЛИТ, 2011
© П. С. Геворкян, 2011

Данная книга вместе с двумя другим книгами автора, изданными под названиями «Высшая математика. Основы математического анализа» и «Высшая математика. Кратные интегралы. Ряды. Дифференциальные уравнения. ТФКП», охватывают весь комплекс вопросов, которые изучаются в рамках курса «Высшая математика» в высших учебных заведениях. Она посвящена основам линейной алгебры и аналитической геометрии и содержит следующие разделы: матрицы и определители, системы линейных уравнений, элементы векторной алгебры, прямые и плоскости, кривые и поверхности второго порядка, линейные пространства и линейные операторы.

Для студентов инженерно-технических и экономических специальностей вузов, а также для всех категории читателей, интересующихся математикой.

Ил. ?

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7

Глава 1. **Матрицы и определители** 8
§ 1.1. Понятие матрицы. Основные определения 8
§ 1.2. Действия над матрицами и их свойства 11
§ 1.3. Понятие определителя 15
§ 1.4. Свойства определителей 19
§ 1.5. Обратная матрица 23
§ 1.6. Линейная зависимость строк матрицы 24
§ 1.7. Элементарные преобразования матриц. Приведение матрицы к ступенчатому виду 26
§ 1.8. Ранг матрицы 28

Глава 2. **Системы линейных уравнений** 31
§ 2.1. Основные понятия 31
§ 2.2. Критерий совместности неоднородной системы линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли 32
§ 2.3. Квадратные неоднородные системы линейных уравнений. Формулы Крамера 34
§ 2.4. Правило отыскания решений общей системы линейных уравнений 37
§ 2.5. Критерий нетривиальной совместности однородной системы линейных уравнений. Свойства решений 38
§ 2.6. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Структура общего решения 40
§ 2.7. Структура общего решения неоднородной системы линейных уравнений 42
§ 2.8. Метод Гаусса нахождения решений произвольной системы линейных уравнений 44

Глава 3. **Элементы векторной алгебры** 48
§ 3.1. Понятие вектора. Основные определения 48
§ 3.2. Линейные операции над векторами 49
§ 3.3. Коллинеарные и компланарные векторы 51
§ 3.4. Координата вектора и точки на прямой. 55
§ 3.5. Аффинная система координат на плоскости. Координаты вектора и точки на плоскости 56
§ 3.6. Аффинная система координат в пространстве. Координаты вектора и точки в пространстве 57
§ 3.7. Координаты суммы векторов и произведения вектора на число 60
§ 3.8. Условие коллинеарности двух векторов. Деление отрезка в данном отношении 62
§ 3.9. Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Ортогональные проекции 64
§ 3.10. Свойства ортогональных проекций 66
§ 3.11. Длина вектора. Расстояние между двумя точками 69
§ 3.12. Направляющие косинусы 70
§ 3.13. Скалярное произведение двух векторов. Основные свойства 71
§ 3.14. Выражение скалярного произведения через прямоугольные координаты 74
§ 3.15. Векторное произведение двух векторов. Основные свойства 76
§ 3.16. Выражение векторного произведения через прямоугольные координаты 79
§ 3.17. Смешанное произведение трех векторов 81
§ 3.18. Выражение смешанного произведения через прямоугольные координаты 83

Глава 4. **Прямые линии и плоскости** 85
§ 4.1. Уравнения прямой на плоскости 85
§ 4.2. Неполные уравнения прямой. Уравнение прямой в отрезках. 89
§ 4.3. Нормальный вектор прямой 90
§ 4.4. Расстояние от точки до прямой 91
§ 4.5. Нормальное уравнение прямой 92

§ 4.6. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых 95
§ 4.7. Уравнения плоскости в пространстве 96
§ 4.8. Нормальный вектор плоскости 99
§ 4.9. Неполные уравнения плоскости. Уравнение плоскости в отрезках 101
§ 4.10. Расстояние от точки до плоскости 103
§ 4.11. Нормальное уравнение плоскости 104
§ 4.12. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей 106
§ 4.13. Уравнения прямой в пространстве 107
§ 4.14. Общее уравнение прямой в пространстве 109
§ 4.15. Угол между прямыми в пространстве. Условие параллельности и перпендикулярности прямых 111
§ 4.16. Угол между прямой и плоскостью. Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости 113
§ 4.17. Некоторые задачи на прямую и плоскость в пространстве 115

Глава 5. **Кривые второго порядка** 119
§ 5.1. Эллипс 119
§ 5.2. Фокальное свойство эллипса 121
§ 5.3. Директориальное свойство эллипса 123
§ 5.4. Гипербола 125
§ 5.5. Фокальное свойство гиперболы 127
§ 5.6. Директориальное свойство гиперболы 130
§ 5.7. Парабола 132
§ 5.8. Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах 135
§ 5.9. Преобразование прямоугольной системы координат плоскости 138
§ 5.10. Линии второго порядка на плоскости. Приведение общего уравнения к простейшему виду 141
§ 5.11. Инвариантность выражения $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Классификация линий второго порядка 144

Глава 6. **Поверхности второго порядка** 151
§ 6.1. Понятие поверхности 151

§ 6.2. Эллипсоиды 152
§ 6.3. Гиперболоиды 154
§ 6.4. Параболоиды 158
§ 6.5. Конусы второго порядка 160
§ 6.6. Цилиндрические поверхности 162
§ 6.7. Теорема об ортогональной классификации поверхностей второго порядка 166

Глава 7. **Линейные пространства** 168
§ 7.1. Понятие линейного пространства 168
§ 7.2. Линейная зависимость элементов линейного пространства 170
§ 7.3. Базис линейного пространства. Координаты элемента . . 172
§ 7.4. Размерность линейного пространства 174
§ 7.5. Изоморфизм линейных пространств 175
§ 7.6. Переход от одного базиса к другому. Формулы преобразования координат 178
§ 7.7. Определение евклидова пространства. Примеры 180
§ 7.8. Неравенство Коши–Буняковского 181
§ 7.9. Длина элемента и угол между элементами в евклидовом пространстве 183
§ 7.10. Ортогональные элементы. Ортонормированный базис . . 184

Глава 8. **Линейные операторы** 187
§ 8.1. Понятие линейного оператора. Действия над линейными операторами 187
§ 8.2. Матрица линейного оператора 188
§ 8.3. Преобразование матрицы линейного оператора при изменении базиса 191
§ 8.4. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора 193
§ 8.5. Матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов 196
Список литературы 199
Предметный указатель 200

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга вместе с двумя другим книгами автора, изданными под названиями «Высшая математика. Основы математического анализа» и «Высшая математика. Кратные интегралы. Ряды. Дифференциальные уравнения. ТФКП», охватывают весь комплекс вопросов, которые изучаются в рамках курса «Высшая математика» для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений.

В предлагаемом учебнике излагаются основы линейной алгебры и аналитической геометрии. В нем нашли отражение следующие разделы линейной алгебры и аналитической геометрии: матрицы и определители (гл. 1), системы линейных уравнений (гл. 2), элементы векторной алгебры (гл. 3), прямые и плоскости (гл. 4), кривые и поверхности второго порядка (главы 5, 6), линейные пространства и линейные операторы (главы 7, 8).

Автор стремился изложить материал но возможности полно, строго и доступно, преследуя цель не просто сообщить те или иные сведения по высшей математике, а вызвать интерес к математике, расширить кругозор и привить математическую культуру.

Книга рассчитана для студентов инженерно-технических и экономических специальностей вузов, а также для всех категорий читателей, серьезно интересующихся математикой.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И.М. Петрушко́ за ценные замечания и благожелательное отношение к данной книге.

Москва, Август, 2006 г. *П.С. Геворкян*

Глава 1

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 1.1. Понятие матрицы. Основные определения

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Для записи матрицы применяются либо сдвоенные черточки, либо круглые скобки:

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\|$$

или

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сокращенно матрица A записывается также в виде

$$A = \|a_{ij}\| \quad \text{либо} \quad A = (a_{ij}),$$

где i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ указывает *номер строки* а j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ — *номер столбца*.

Числа a_{ij}, образующие матрицу A, называются ее *элементами*.

Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковую размерность и их соответствующие элементы совпадают. Иначе говоря, если $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — матрицы одинаковой размерности, то

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij},$$

для всех i и j.

Матрица размерности $m \times 1$ (соответственно, $1 \times n$) называется *вектор-столбцом* (соответственно, *вектор-строкой*).

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается через O:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $-A = (-a_{ij})$ называется *противоположной* матрице $A = (a_{ij})$.

Матрица, полученная из данной матрицы A заменой местами строк и столбцов с сохранением порядка их следования, называется *транспонированной к матрице* A и обозначается через A' (или $A^\top$). Итак, если $A = (a_{ij})$ — матрица размерности $m \times n$, то транспонированная матрица

$$A' = (a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

имеет размерность $n \times m$.

Нетрудно заметить, что, *транспонируя транспонированную матрицу*, *возвращаемся к исходной матрице*, т. е.

$$(A')' = A.$$

Матрица A, у которой число строк равно числу столбцов: $m = n$, называется *квадратной матрицей* порядка n.

В квадратной матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

диагональ $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, идущая из левого верхнего угла в правый нижний угол, называется *главной диагональю* матрицы A. *Побочной диагональю* той же матрицы называется другая диагональ: $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \ldots, a_{1n}$, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол.

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, называется *верхней треугольной* (*нижней треугольной*), если все элементы этой матрицы, стоящие ниже (выше) главной диагонали, равны нулю. Итак, верхняя треугольная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а нижняя треугольная матрица — вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, называется *диагональной*, если все элементы этой матрицы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю: $a_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$.

Если в диагональной матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

все элементы главной диагонали равны единице: $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 1$, то эта матрица называется *единичной* и обычно обозначается через E. Итак,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

иначе говоря, $E = (e_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, где

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{1.3}$$

§ 1.2. Действия над матрицами и их свойства

Определим основные действия над матрицами.

1. **Сложение матриц**. *Суммой* двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ одинаковой размерности $m \times n$, называется матрица $C = (c_{ij})$ той же размерности $m \times n$, элементы которой определяются равенством

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.4}$$

В этом случае пишут $C = A + B$.

Точно так же определяется понятие *разности* $A - B$ двух матриц одной и той же размерности. Итак, по определению

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Из определения суммы двух матриц (см. формулу (1.4)) следует, что операция сложения матриц обладает такими же свойствами, что и операция сложения действительных чисел:

Теорема 1.1. *Операция сложения матриц обладает следующими основными свойствами*:

1) *коммутативность*:

$$A + B = B + A, \tag{1.6}$$

2) *ассоциативность*:

$$A + (B + C) = (A + B) + C, \tag{1.7}$$

3) *существование нулевого вектора*:

$$A + O = A, \tag{1.8}$$

4) *существование противоположной матрицы*:

$$A + (-A) = O, \tag{1.9}$$

где A, B и C — произвольные матрицы одной и той же размерности, а O — нулевая матрица.

2. **Умножение матрицы на число**. *Произведением* матрицы $A = (a_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ размерности $m \times n$ на число λ называется матрица $C = (c_{ij})$ той же размерности $m \times n$, элементы которой определяются равенством:

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.10}$$

В этом случае пишут $C = \lambda A$ или $C = A\lambda$. Итак, по определению

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Теорема 1.2. *Умножение матрицы на число обладает следующими основными свойствами*:

1) *ассоциативность*:

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A, \tag{1.12}$$

2) *дистрибутивность относительно суммы матриц*:

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \tag{1.13}$$

3) *дистрибутивность относительно суммы чисел*:

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \tag{1.14}$$

4) *нормированность*:

$$1 \cdot A = A, \tag{1.15}$$

где A и B — произвольные матрицы одной и той же размерности, а λ и μ — произвольные числа.

Доказательства перечисленных в теореме свойств непосредственно следуют из формул (1.4) и (1.10).

2. **Произведение матриц**. Пусть $A = (a_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ — матрица размерности $m \times n$, а $B = (b_{jk})$ $(j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, p)$ — матрица размерности $n \times p$, т. е. предполагаем, что число *столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B*.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на матрицу $B = (b_{jk})$ называется матрица $C = (c_{ik})$ размерности $m \times p$, элементы которой определяются равенством:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}, \tag{1.16}$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$, а $k = 1, 2, \ldots, p$. То есть, *элемент i-й строки и k-го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.*

Для обозначения произведения матрицы A на B используют запись $C = A \cdot B$ или $C = AB$.

Если применить указанное правило умножения матриц к квадратным матрицам второго порядка, получим

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

Теорема 1.3. *Произведение матриц обладает следующими основными свойствами*:

1) *ассоциативность*:

$$A(BC) = (AB)C, \tag{1.18}$$

2) *дистрибутивность относительно суммы матриц*:

$$(A + B)C = AC + BC, \quad A(B + C) = AB + AC, \tag{1.19}$$

3) *однородность*:

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B, \tag{1.20}$$

если, конечно, указанные суммы и произведения матриц имеют смысл.

Доказательство. Свойства (1.19) и (1.20) непосредственно следуют из формул (1.4), (1.10) и (1.16).

Докажем свойство (1.18). Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размерности $m \times n$, $B = (b_{jk})$ — матрица размерности $n \times p$, а $C = (c_{kl})$ — матрица размерности $p \times q$. Тогда, согласно (1.16), элемент d_{il} произведения $A(BC)$ вычисляется по формуле

$$d_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl},$$

а элемент d'_{il} произведения $(AB)C$ — по формуле

$$d'_{il} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl}.$$

Теперь заметим, что $d_{il} = d'_{il}$ в силу правомерности изменения порядка суммирования относительно i и j.

Теорема доказана. □

Замечание 1.1. Пусть A и B — квадратные матрицы одинакового порядка. Тогда имеет смысл ставить вопрос о *свойстве коммутативности* произведения матриц. Следующий простой пример показывает, что *произведение квадратных матриц одинакового порядка, вообще говоря, не обладает свойством коммутативности* $AB = BA$.

В самом деле, пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и, значит, $AB \neq BA$.

Однако верно утверждение: *для произвольной квадратной матрицы A порядка n справедливы равенства*

$$AE = EA = A, \tag{1.21}$$

$$AO = EO = O, \tag{1.22}$$

где E — единичная матрица, а O — нулевая матрица того же порядка n.

Справедливость формулы (1.22) очевидна. Докажем формулу (1.21). Пусть $A = (a_{ij})$, а $E = (e_{jk})$, где $e_{jk} = 1$, если $j = k$, и $e_{jk} = 0$, если $j \neq k$ (см. (1.3)). Тогда, в силу (1.16), для элемента c_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ произведения AE получаем

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_{jk} = a_{ik} e_{kk} = a_{ik},$$

т. е. $AE = A$. Точно так же имеем: $EA = A$. Итак, формула (1.21) доказана. □

§ 1.3. Понятие определителя

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу A порядка n. Понятие *определителя* (или, *детерминанта*) квадратной матрицы A, которое обозначается через $\det A$ или $|A|$, введем индуктивным способом.

При $n = 1$ матрица первого порядка $A = (a_{11})$ состоит из одного элемента a_{11} и *определителем первого порядка*, соответствующим этой матрице, называется число a_{11}.

Если $n = 2$, то мы имеем матрицу второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

Определителем второго порядка, соответствующим этой матрице, называется число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Итак, по определению,

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.24}$$

В словесной форме последнее правило вычисления определителя второго порядка звучит так: *определитель второго порядка, соответствующий матрице* (1.23), *равен разности произведения элементов главной диагонали этой матрицы и произведения элементов ее побочной диагонали.*

Перейдем теперь к индуктивному шагу: предположим, что нами уже введено понятие определителя порядка $n - 1$, соответствующего произвольной квадратной матрице $(n - 1)$-го порядка. Для введения определителя n-го порядка определим понятие *минора* элемента матрицы.

Минором некоторого элемента a_{ij} матрицы n-го порядка A называется определитель $(n - 1)$-го порядка, соответствующий матрице, которая получается из исходной матрицы A в результате вычеркивания той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}, т. е. i-й строки и j-го столбца. Минор элемента a_{ij} обозначается M_{ij}.

Определителем n-го порядка, соответствующим матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

называется число, равное

$$a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}$$

и обозначаемое $\det A$, либо $|A|$, либо

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.26}$$

Итак, по определению

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}. \tag{1.27}$$

Последняя формула называется *разложением определителя n-го порядка* (1.26) *по первой строке*.

Заметим, что при $n = 2$ миноры элементов первой строки матрицы второго порядка (1.23) имеют вид: $M_{11} = a_{22}$, $M_{12} = a_{21}$ и, следовательно, правило (1.27) в точности совпадает с правилом вычисления определителя второго порядка (1.24), что и следовало ожидать.

Следующая важная теорема показывает, что для определения понятия определителя в формуле (1.27) можно было взять элементы и соответствующие им миноры не первой, а любой строки матрицы (1.25).

Теорема 1.4. *Каков бы ни был номер строки i ($i = 1, 2, \ldots, n$) для определителя матрицы* (1.25) *справедлива формула*

$$|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n}a_{in}M_{in} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}. \tag{1.28}$$

Формула (1.28) называется *разложением определителя n-го порядка* (1.26) *по i-й строке*.

На самом деле, как показывает следующая теорема, определитель (1.26) можно разложить и по любому столбцу тоже.

Теорема 1.5. *Каков бы ни был номер столбца* j ($j = 1, 2, \ldots, n$), *для определителя матрицы* (1.25) *справедлива формула*

$$|A| = (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j} + \ldots + (-1)^{n+j}a_{nj}M_{nj} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}. \quad (1.29)$$

Формула (1.29) называется *разложением определителя* n*-го порядка* (1.26) *по* j*-му столбцу*.

Формулы (1.28) и (1.29) без особых сложностей проверяются в случаях определителей второго и третьего порядков. В общем же случае их доказательства можно найти в учебниках по линейной алгебре.

Теперь, в качестве примера, вычислим по формуле (1.27) определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Итак, мы получили следующую формулу вычисления определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}. \quad (1.30)$$

Пример 1.1. Вычислить определитель верхней треугольной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Р е ш е н и е. Согласно формуле (1.29), разложим определитель матрицы (1.31) по ее первому столбцу, в результате чего получим

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где справа стоит определитель верхней треугольной матрицы порядка $n-1$. Этот определитель снова разложим по первому столбцу, получим

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продолжая эти рассуждения, мы придем к следующей формуле вычисления определителя верхней треугольной матрицы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}. \tag{1.32}$$

Точно такими же рассуждениями (с той лишь разницей, что нужно воспользоваться разложением по первой строке) получается следующая формула вычисления определителя нижней треугольной матрицы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}. \tag{1.33}$$

Из формул (1.32) или (1.33), в частности, следует, что определитель единичной матрицы E равен единице:

$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{1.34}$$

§ 1.4. Свойства определителей

В этом параграфе мы докажем ряд свойств, которыми обладает произвольный определитель n-го порядка.

Свойство 1. *При транспонировании матрицы определитель не меняется, т. е.*

$$|A| = |A'|, \tag{1.35}$$

где матрица A' — транспонированная к матрице A (см. (1.1)).

Для доказательства этого свойства достаточно заметить, что разложение определителя матрицы A по первой строке совпадает с разложением определителя транспонированной матрицы A' по первому столбцу, и применить теоремы 1.4 и 1.5.

Свойство 1 называется *свойством равноправности строк и столбцов*.

Замечание 1.2. Из свойства 1 следует, что *все утверждения, доказываемые для строк определителей, верны и для столбцов, и наоборот*. По этой причине все последующие свойства мы установим лишь для строк.

Свойство 2. *Если в матрице поменять местами две строки, то ее определитель сменит знак.*

Это свойство легко установить для определителей второго и третьего порядков. В общем случае его доказательство можно найти в учебниках по линейной алгебре.

Свойство 3. *Если матрица имеет две одинаковые строки, то ее определитель равен нулю.*

Действительно, поменяем местами две одинаковые строки матрицы A. От этого матрица A не изменится, а ее определитель, в силу свойства 2, сменит знак. Значит, $|A| = -|A|$, откуда и следует, что $|A| = 0$.

Свойство 4. *Если некоторую строку матрицы умножить на число λ, то ее определитель умножится на это число.*

Предположим, что матрица B получается из матрицы A умножением ее i-й $(1 \leqslant i \leqslant n)$ строки на число λ:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле (1.28) имеем

$$|B| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\lambda a_{ij}M_{ij} = \lambda\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = \lambda|A|.$$

Свойство 4 можно сформулировать иначе: *общий множитель элементов некоторой строки определителя можно вынести за знак определителя*. Скажем

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Из свойства 4, при $\lambda = 0$, непосредственно следует, что, *если все элементы некоторой строки матрицы равны нулю, то ее определитель равен нулю.*

Свойство 5. *Если две строки матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.*

Пропорциональность двух строк матрицы A означает, что одна строка получается из другой умножением на некоторое число λ. Но тогда, согласно свойству 4, определитель первоначальной матрицы A равен произведению числа λ на определитель матрицы, у которой две строки равны. Однако определитель последней матрицы равен нулю в силу свойства 3. Поэтому и определитель исходной матрицы A равен нулю.

Свойство 6. *Пусть в матрице A i-я $(1 \leqslant i \leqslant n)$ строка имеет вид*

$$(\ a'_{i1} + a''_{i1} \quad a'_{i2} + a''_{i2} \quad \ldots \quad a'_{in} + a''_{in}\ ).$$

Тогда определитель этой матрицы можно представить в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \cdots & a'_{in} + a''_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \cdots & a''_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (1.36)$$

или

$$|A| = |A_1| + |A_2|,$$

где матрица A_1 *получается из матрицы* A *заменой* i*-й строки на строку* $(a'_{i1}\ a'_{i2}\ \dots\ a'_{in})$, *а матрица* A_1 — *заменой* i*-й строки на строку* $(a''_{i1}\ a''_{i2}\ \dots\ a''_{in})$.

Действительно, по формуле (1.28) имеем

$$|A| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}(a'_{ij} + a''_{ij})M_{ij} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a'_{ij}M_{ij} + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a''_{ij}M_{ij} = |A_1| + |A_2|.$$

Свойство 7. *Если к элементам некоторой строки матрицы прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на произвольное число* λ, *то определитель этой матрицы не изменится.*

В самом деле, полученный в результате указанной операции определитель в силу свойства 6 можно представить в виде суммы двух определителей (см. формулу (1.36)), первый из которых совпадает с исходным, а второй равен нулю в силу пропорциональности двух строк (см. свойство 5).

Свойство 7 широко применяется в вычислениях определителей, поскольку оно позволяет, не меняя определитель матрицы, обратить в нуль все элементы данной ненулевой строки (ненулевого столбца), за исключением одного, и разложить определитель по этой строке (этому столбцу). Действительно, для этого применяется следующий алгоритм: пусть $a_{11} \neq 0$. Прибавим ко второй строке матрицы первую ее строку, умноженную на число $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$. Тогда первый элемент второй строки станет нулевым. Далее, к третьей строке следует прибавить первую строку, умноженную на число $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$, и т. д. В результате получим матрицу, все элементы первого столбца которой равны нулю, кроме $a_{11} \neq 0$.

Прежде чем сформулировать еще одно свойство определителя, введем понятие *алгебраического дополнения* элемента матрицы.

Определение 1.1. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} матрицы n-го порядка A называется число, равное $(-1)^{i+j}M_{ij}$ и обозначаемое символом A_{ij}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}, \tag{1.37}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n,\ \ j = 1, 2, \ldots, n)$.

Итак, алгебраическое дополнение данного элемента может отличается от минора этого элемента только знаком.

Используя алгебраические дополнения, формулы (1.28) и (1.29) разложения определителя n-го порядка по i-й строке и по j-му столбцу, соответственно можно записать так:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{1.38}$$

для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, и

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{1.39}$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, n$.

Свойство 8. *Сумма произведений элементов какой-либо строки матрицы на соответствующие алгебраические дополнения элементов любой другой строки равна нулю. То есть*,

$$a_{i1}A_{i'1} + a_{i2}A_{i'2} + \ldots + a_{in}A_{i'n} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{i'j} = 0 \tag{1.40}$$

для всех $i \neq i',\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant i' \leqslant n$.

В самом деле, сумма $a_{i1}A_{i'1} + a_{i2}A_{i'2} + \ldots + a_{in}A_{i'n}$ равна нулю, поскольку, как нетрудно заметить, она является определителем матрицы, полученной из матрицы A заменой i'-й строки на i-ю строку и, следовательно, имеющую две одинаковые строки.

Наконец, сформулируем без доказательства важное *свойство об определителе произведения матриц*.

Свойство 9. *Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей сомножителей, т. е.*

$$|AB| = |A||B|. \tag{1.41}$$

§ 1.5. Обратная матрица

Пусть A — квадратная матрица n-го порядка, а E — единичная матрица того же порядка.

Определение 1.2. Матрица B называется *обратной* для квадратной матрицы A, если $AB = BA = E$.

Из этого определения следует, что обратная матрица B будет квадратной матрицей того же порядка, что и матрица A.

Обратная матрица для матрицы A обозначается A^{-1}. Таким образом,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E, \tag{1.42}$$

если, конечно, существует A^{-1}.

Из определения обратной матрицы следует, что матрица A в свою очередь является обратной для матрицы A^{-1}, т. е.

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Про матрицы A и A^{-1} можно говорить, что они обратны друг другу или взаимно обратны.

Определение 1.3. Матрица A называется *невырожденной*, если определитель этой матрицы отличен от нуля: $|A| \neq 0$, в противном случае матрица называется *вырожденной*.

Теорема 1.6. *Если матрица A имеет обратную, то эта матрица является невырожденной*: $|A| \neq 0$.

Доказательство. Пусть A^{-1} — обратная матрица для матрицы A. Тогда $AA^{-1} = E$, откуда, согласно свойству 8 определителей (см. § 1.4), получим $|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |E| = 1$. Из полученного равенства $|A||A^{-1}| = 1$ следует, что $|A| \neq 0$ и что

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}. \tag{1.43}$$

Теорема доказана. □

Верно и обратное утверждение:

Теорема 1.7. *Всякая невырожденная матрица*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.44}$$

имеет обратную матрицу A^{-1}, *причем*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.45}$$

где A_{ij} — *алгебраические дополнения элементов* a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$) *матрицы* A.

Доказательство. Докажем, что матрица A^{-1}, определенная формулой (1.45), в самом деле является обратной для матрицы A. Для этого следует доказать равенства $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Обозначим $AA^{-1} = C$ и вычислим элемент c_{ik} ($i = 1, 2, \ldots, n$ и $k = 1, 2, \ldots, n$) матрицы C согласно формуле (1.16):

$$c_{ik} = \frac{1}{|A|}(a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn}).$$

Так как

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} |A| & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k, \end{cases}$$

(см. формулы (1.38) и (1.40)), то, следовательно,

$$c_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k. \end{cases} \tag{1.46}$$

А это значит, что матрица C — единичная: $C = E$. Таким образом, равенство $AA^{-1} = E$ доказано. Точно так же доказывается и равенство $A^{-1}A = E$.

Теорема доказана. □

§ 1.6. Линейная зависимость строк матрицы

Рассмотрим матрицу A размерности $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.47}$$

Поскольку строки (столбцы) матрицы (1.47) представляют собой матрицы одной и той же размерности $1 \times n$ ($m \times 1$), то их можно складывать и умножать на числа.

Через A_i обозначим i-ю строку матрицы (1.47):

$$A_i = (\ a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ \dots\ \ a_{in}\ ),$$

где $i = 1, 2, \dots, m$.

Выражение

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n \tag{1.48}$$

называется *линейной комбинацией* строк A_1, A_2, ..., A_n с коэффициентами λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Линейная комбинация (1.48) называется *тривиальной*, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Если хотя бы одно из чисел λ_1, λ_2, ..., λ_n не равно нулю, то линейная комбинация (1.48) называется *нетривиальной*.

Определение 1.4. Строки A_1, A_2, ..., A_n называются *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих строк, равная нулевой строке. Иначе говоря, если существуют такие числа λ_1, λ_2, ..., λ_n, не все равные нулю, что справедливо равенство

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n = 0, \tag{1.49}$$

где $0 = (\ 0\ \ 0\ \ \dots\ \ 0\ )$ — нулевая строка или нулевая матрица размерности $1 \times n$.

Строки A_1, A_2, ..., A_n называются *линейно независимыми*, если они не являются линейно зависимыми, иначе говоря, если равенство (1.49) возможно лишь в случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Теорема 1.8. *Строки A_1, A_2, ..., A_n являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда одна из этих строк является линейной комбинацией остальных строк.*

Доказательство. Пусть строки A_1, A_2, ..., A_n являются линейно зависимыми, т. е. справедливо равенство (1.49), где хотя бы одно из чисел λ_1, λ_2, ..., λ_n отлично от нуля. Не теряя общности, предположим, что $\lambda_1 \neq 0$. Тогда, поделив равенство (1.49) на $\lambda_1 \neq 0$ и обозначив $\mu_2 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}, \dots, \mu_n = -\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}$, получим

$$A_1 = \mu_2 A_2 + \dots + \mu_n A_n, \tag{1.50}$$

а это и значит, что строка A_1 является линейной комбинацией строк A_2, ..., A_n.

Теперь предположим, что одна из строк, например, строка A_1, является линейной комбинацией строк A_2, ..., A_n, т. е. справедливо равенство (1.50). Это равенство можно переписать в виде

$$(-1)A_1 + \mu_2 A_2 + \ldots + \mu_n A_n = 0, \tag{1.51}$$

но это значит, что строки A_1, A_2, ..., A_n линейно зависимы, поскольку один из коэффициентов -1, μ_2, ..., μ_n отличен от нуля.

Теорема доказана. □

Отметим еще раз, что все рассуждения, изложенные выше, справедливы также для столбцов матрицы.

§ 1.7. Элементарные преобразования матриц. Приведение матрицы к ступенчатому виду

Определение 1.5. *Элементарными преобразованиями матриц* называются следующие действия над ними:

1) перестановка строк или столбцов;

2) умножение строки или столбца на произвольное число, отличное от нуля;

3) добавление к одной из строк другой строки, умноженной на произвольное число, или добавление к одному из столбцов другого столбца, умноженного на произвольное число.

Две матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Для эквивалентных матриц A и B применяется обозначение $A \sim B$.

Будем говорить, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

имеет *верхний* (*нижний*) *треугольный* вид, если все ее элементы, расположенные ниже (выше) элементов a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr}, где $r = \min\{m, n\}$, равны нулю. Если же все элементы, отличные от элементов a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr} ($r = \min\{m, n\}$), равны нулю, то скажем, что матрица (1.52) имеет *диагональный* вид.

Говорят, что матрица (1.52) имеет *ступенчатый вид*, если она имеет либо верхний, либо нижний треугольный вид.

Теперь опишем алгоритм, который показывает, что *посредством элементарных преобразований любую матрицу можно привести к ступенчатому виду*.

Пусть матрица (1.52) ненулевая и, не теряя общности, предположим, что $a_{11} \neq 0$ (в противном случае этого можно добиться путем перестановки строк и столбцов). Вычитая из j-го столбца матрицы (1.52) (для всех $j = 2, 3, \ldots, n$) первый столбец, умноженный на $\dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$, мы получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}.$$

Теперь точно так же поступим с матрицей

$$\begin{pmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}.$$

Продолжая действовать аналогичным способом, через конечное число шагов получим матрицу нижнего диагонального вида.

Если описанные выше операции совершить со строками матрицы, то в итоге получим матрицу верхнего диагонального вида.

Пример 1.2. Матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

привести к ступенчатому виду.

Решение. Применяя описанный выше алгоритм, получим следующую цепочку эквивалентностей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -6 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 7 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет нижний треугольный вид.

§ 1.8. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размерности $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выберем произвольно k строк и k столбцов матрицы A, где $k \leqslant \min(m, n)$ (номера строк могут отличаться от номеров столбцов). Определитель матрицы, составленной из элементов, стоящих на пересечении выбранных k строк и k столбцов, называется *минором k-го порядка* матрицы A.

Очевидно, что минором первого порядка матрицы A является любой элемент этой матрицы.

Определение 1.6. *Рангом* ненулевой матрицы A называется наибольший из порядков миноров этой матрицы, отличных от нуля. *Ранг* нулевой матрицы считается равным нулю.

Ранг матрицы A обозначим через $\operatorname{rang} A$. Очевидно, что $0 \leqslant \operatorname{rang} A \leqslant \min(m, n)$.

Замечание 1.3. Если $\operatorname{rang} A = r$, то это, по определению, значит, что

1) существует минор r-го порядка матрицы A, который отличен от нуля, и

2) все миноры $(r+1)$-го и более высокого порядков матрицы A (если таковые существуют) равны нулю.

Если $\operatorname{rang} A = r$, то минор r-го порядка матрицы A, который отличен от нуля, называется *базисным минором* этой матрицы. Строки и столбцы, пересечение которых дает базисный минор, называются *базисными строками* и *базисными столбцами* соответственно. Заметим, что матрица A может иметь несколько базисных миноров.

Ранг невырожденной квадратной матрицы A порядка n равен n, так как ее определитель является минором порядка n.

Так как при транспонировании матрицы определитель не меняется (см. § 1.4, свойство 1), то такое же утверждение верно и для ранга матрицы.

Теорема 1.9. *При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.*

Теперь сформулируем следующую важную теорему.

Теорема 1.10 (теорема о базисном миноре). *Базисные строки* (*базисные столбцы*) *матрицы линейно независимы. Любая строка* (*любой столбец*) *матрицы является линейной комбинацией ее базисных строк* (*базисных столбцов*).

Доказательство этой теоремы можно найти в учебниках по линейной алгебре.

Из последней теоремы, в частности, следует, что *ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк* (*столбцов*).

Теорема 1.11. *Определитель квадратной матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда все строки* (*столбцы*) *этой матрицы линейно зависимы.*

Доказательство. Пусть определитель квадратной матрицы порядка n равен нулю. Это значит, что ранг r этой матрицы заведомо меньше n. Но тогда хотя бы одна строка этой матрицы не является базисной. По теореме 1.10 о базисном миноре эта строка является линейной комбинацией базисных строк. Если в эту линейную комбинацию включить с нулевыми коэффициентами и оставшиеся строки данной матрицы, то получим, что одна строка матрицы является линейной комбинацией остальных. Следовательно, в силу теоремы 1.8 все строки данной матрицы линейно зависимы.

Пусть, теперь, все строки квадратной матрицы A линейно зависимы. По теореме 1.8 это значит, что одна из ее строк, скажем, первая строка, A_1, является линейной комбинацией остальных. Вычитая из строки A_1 указанную линейную комбинацию, получим матрицу B с нулевой первой строкой. Следовательно, $|B| = 0$. Но поскольку $|A| = |B|$ (см. § 1.4, свойство 7), то значит $|A| = 0$.

Теорема доказана. □

Нахождение ранга матрицы с помощью вычисления всех ее миноров требует слишком большой вычислительной работы. Поэтому для нахождения ранга применяется другой алгоритм, основанный на *элементарных преобразованиях матриц* (см. § 1.7).

Теорема 1.12. *При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.*

Итак, если $A \sim B$, то $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$.

Пример 1.3. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Если ко второй строке данной матрицы добавим первую строку, умноженную на -2, к третьей строке добавим первую, умноженную на -1, и к четвертой строке добавим первую, умноженную на -2, то получим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Далее, к четвертой строке полученной матрицы прибавим вторую строку, умноженную на -1. Получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Наконец, к четвертой строке полученной матрицы добавив третью строку, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

И поскольку ранг последней матрицы, очевидно, равен трем, то ранг исходной матрицы A также равен трем: $\operatorname{rang} A = 3$.

Глава 2

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 2.1. Основные понятия

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система уравнений вида

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \tag{2.1}$$

где x_1, x_2, …, x_n — неизвестные, подлежащие определению.

Числа a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, называются *коэффициентами* системы (2.1), а числа b_i — ее *свободными членами*.

Система уравнений (2.1) называется *однородной*, если все ее свободные члены равны нулю: $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$.

Если хотя бы один из свободных членов b_1, b_2, …, b_m отличен от нуля, то система (2.1) называется *неоднородной*.

Система уравнений (2.1) называется *квадратной*, если число уравнений этой системы равно числу ее неизвестных: $m = n$.

Решением системы (2.1) называется любой набор чисел α_1, α_2, …, α_n, которые при подстановке в систему вместо неизвестных x_1, x_2, …, x_n превращают все уравнения системы в верные равенства.

Система (2.1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Весьма удобной формой записи системы (2.1) является матричная запись. Для этого введем следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Матрица A называется *основной матрицей* системы (2.1). Матрицы X и B называются столбцами *неизвестных* и *свободных членов* соответственно.

Применяя правило умножения двух матриц, легко проверить, что с помощью введенных обозначений систему (2.1) можно записать в виде

$$AX = B. \tag{2.4}$$

Это и есть *матричная форма* записи системы (2.1).

Решением системы (2.4) называется столбец чисел

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

который после подстановки в матричное уравнение (2.4) вместо столбца неизвестных X превращает это уравнение в верное матричное равенство.

Расширенной матрицей системы (2.1) называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

отличающаяся от матрицы A системы (2.1) наличием дополнительного столбца из свободных членов.

§ 2.2. Критерий совместности неоднородной системы линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли

Следующая теорема дает исчерпывающий ответ на вопрос о совместности неоднородной системы m линейных уравнений с n неизвестными (2.1).

Теорема 2.1 (теорема Кронекера–Капелли). *Система линейных уравнений* (2.1) *совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы этой системы равен рангу ее основной матрицы.*

Доказательство. Пусть система (2.1) совместна. Докажем, что тогда $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^*$.

Столбцы основной матрицы A обозначим через $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, …, $A^{(n)}$ и предположим, что набор чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ является решением системы (2.1). Тогда

$$\alpha_1 A^{(1)} + \alpha_2 A^{(2)} + \ldots + \alpha_n A^{(n)} = B, \tag{2.6}$$

т. е. столбец свободных членов является линейной комбинацией столбцов матрицы A. Теперь заметим, что если из последнего столбца расширенной матрицы A^* вычесть линейную комбинацию $\alpha_1 A^{(1)} + \alpha_2 A^{(2)} + \ldots + \alpha_n A^{(n)}$, то получим матрицу, эквивалентную матрице A^*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}.$$

Откуда в силу теоремы 1.12 следует, что $\operatorname{rang} A^* = \operatorname{rang} A$.

Теперь предположим, что $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^* = r$ и докажем, что тогда система (2.1) совместна.

Рассмотрим r базисных столбцов основной матрицы A, которые будут базисными столбцами и для расширенной матрицы A^* в силу равенства рангов этих матриц. По теореме 1.10 о базисном миноре последний столбец B расширенной матрицы A^* представляет собой некоторую линейную комбинацию указанных r базисных столбцов, а следовательно, и всех столбцов основной матрицы (в этой линейной комбинации небазисные столбцы следует взять с нулевыми коэффициентами). Итак, существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, что справедливо равенство (2.6). Это и значит совместность системы (2.1).

Теорема доказана. □

Замечание 2.1. Теорема Кронекера–Капелли дает необходимое и достаточное условие совместности неоднородной системы линейных уравнений, однако не дает способа отыскания решений этой системы. Эту задачу для разных систем линейных уравнений мы подробно рассмотрим в последующих параграфах.

§ 2.3. Квадратные неоднородные системы линейных уравнений. Формулы Крамера

Рассмотрим квадратную неоднородную систему:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Учитывая обозначения (2.2) и (2.3), систему (2.7) перепишем в следующей матричной форме:

$$AX = B. \tag{2.8}$$

Определитель основной матрицы A системы (2.7) обозначим через Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

а через Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, обозначим определитель матрицы, полученной из основной матрицы A заменой i-го столбца на столбец B свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что если определитель Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, разложить по i-му столбцу, то получим:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n\\ \Delta_2 &= A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Delta_n &= A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$) матрицы A.

Теорема 2.2. *Если* $\Delta \neq 0$, *то квадратная неоднородная система* (2.7) *имеет, и при том единственное, решение, определяемое следующими формулами Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Пусть $\Delta \neq 0$, т. е. матрица A невырожденная. Тогда, по теореме 1.7, существует обратная матрица A^{-1}. Умножив слева обе части равенства (2.8) на A^{-1}, получим $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$, или $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}A = E$ и $EX = X$, то мы окончательно получим

$$X = A^{-1}B. \tag{2.11}$$

Это так называемый *матричный способ* решения системы линейных уравнений (2.7).

Таким образом, квадратная неоднородная система (2.7) имеет единственное решение и оно в матричной форме может быть записано в виде (2.11).

Теперь, учитывая формулу (1.45) обратной матрицы A^{-1}, матричное равенство 2.11) перепишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Учитывая равенства (2.9), окончательно получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \\ \cdots \\ \dfrac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Откуда и следуют формулы Крамера (2.10).

Теорема доказана. □

Пример 2.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим основную матрицу A данной системы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

и столбец свободных членов

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Находим определитель Δ матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеет единственное решение и для нахождения этого решения можно применить формулы Крамера (2.10).

Вычислим дополнительные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3.$$

Итак, $x_1 = \dfrac{0}{-3} = 0$, $x_2 = \dfrac{-3}{-3} = 1$, $x_3 = \dfrac{3}{-3} = -1$.

§ 2.4. Правило отыскания решений общей системы линейных уравнений

Рассмотрим теперь общую систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \tag{2.12}$$

Предположим, что система (2.12) совместна и займемся отысканием всех решений этой системы.

Пусть ранг основной и расширенной матриц системы (2.12) равен r.

Не теряя общности, предположим, что базисный минор основной матрицы находится в ее левом верхнем углу (такого расположения базисного минора можно добиться посредством перестановки в системе (2.12) уравнений и неизвестных).

Тогда первые r строк как основной, так и расширенной матрицы являются базисными строками и, по теореме 1.10 о базисном миноре, все строки расширенной матрицы, начиная с $(r+1)$-й строки, линейно выражаются через первые r строк этой матрицы. А это значит, что все уравнения системы (2.12), начиная с $(r+1)$-го уравнения, являются линейными комбинациями (т. е. следствиями) первых r уравнений этой системы.

Иначе говоря, *всякое решение первых r уравнений системы* (2.12) *является решением и для всех последующих уравнений этой системы*.

Таким образом, для нахождения всех решений системы (2.12) достаточно найти все решения системы, состоящей из ее первых r уравнений. Эту систему перепишем в виде

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_m - a_{r(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{array} \tag{2.13}$$

Теперь заметим, что последняя система имеет единственное решение для произвольного набора неизвестных x_{r+1}, ..., x_n, поскольку определитель основной матрицы этой системы совпадает с отличным от нуля базисным минором основной матрицы системы (2.12). И это решение находится по формулам Крамера (2.10).

Продемонстрируем изложенный выше алгоритм нахождения решений общей системы линейных уравнений на конкретном примере.

Пример 2.2. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - \ x_3 - x_4 &= 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 2, \\ 3x_1 + x_2 + \ x_3 - x_4 &= 2. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Решение. Нетрудно убедиться, что ранг как основной, так и расширенной матрицы данной системы равен двум. Причем минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

расположенный в левом верхнем углу основной матрицы, отличен от нуля.

Отбросим последнее уравнение данной системы и полученную систему перепишем в виде

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \quad x_3 + x_4, \\ x_1 - x_2 &= 2 - 3x_3 - x_4. \end{aligned}$$

Согласно формулам Крамера из последней системы находим бесконечное множество решений системы (2.14):

$$x_1 = 1 - x_3, \quad x_2 = -1 + 2x_3 + x_4, \quad x_3 = c_3, \quad x_4 = c_4,$$

где неизвестные x_3 и x_4 принимают произвольные значения c_3 и c_4. Положив, например, $x_3 = 0$ и $x_4 = 0$, получим одно из частных решений системы (2.14): $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

§ 2.5. Критерий нетривиальной совместности однородной системы линейных уравнений. Свойства решений

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 \ + a_{12}x_2 \ + \ldots + a_{1n}x_n \ &= 0, \\ a_{21}x_1 \ + a_{22}x_2 \ + \ldots + a_{2n}x_n \ &= 0, \\ \ldots\ldots \ \ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 \ + a_{m2}x_2 \ + \ldots + a_{mn}x_n \ &= 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Заметим, что *однородная система* (2.15) *всегда совместна*, поскольку она всегда обладает так называемым *тривиальным* или *нулевым* решением $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$.

Если однородная система (2.15) кроме указанного тривиального решения имеет и другие решения, то тогда говорят, что эта однородная система *нетривиально совместна*.

Здесь возникает естественный вопрос: *при каких условиях однородная система* (2.15) *имеет нетривиальные решения*, *иначе говоря*, *нетривиально совместна*. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2.3. *Однородная система* (2.15) *имеет нетривиальные решения тогда и только тогда*, *когда ранг ее основной матрицы A меньше числа n ее столбцов*: $\operatorname{rang} A < n$.

Доказательство. Пусть система (2.15) имеет нетривиальное решение α_1, α_2, …, α_n. Это значит, что выполняется равенство

$$\alpha_1 A^{(1)} + \alpha_2 A^{(2)} + \ldots + \alpha_n A^{(n)} = O, \tag{2.16}$$

где $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, …, $A^{(n)}$ — столбцы основной матрицы A, а O — нулевой столбец размерности $m \times 1$.

Равенство (2.16) означает, что столбцы $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, …, $A^{(n)}$ основной матрицы A линейно зависимы и, значит, они не являются базисными столбцами матрицы A. Итак, количество базисных столбцов, или ранг, основной матрицы A меньше числа n ее столбцов.

Пусть теперь $\operatorname{rang} A < n$. Из этого, по теореме 1.10 о базисном миноре следует, что столбцы $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, …, $A^{(n)}$ основной матрицы A линейно зависимы. То есть, существуют такие числа α_1, α_2, …, α_n, *не все равные нулю*, что справедливо равенство (2.16). А это и значит, что набор чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ является нетривиальным решением однородной системы (2.15).

Теорема доказана. □

Следующая теорема непосредственно следует из предыдущей теоремы.

Теорема 2.4. *Квадратная однородная система*

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0,\\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, *когда определитель ее основной матрицы A равен нулю.*

Решения нетривиально совместной однородной системы (2.15) обладают *линейными свойствами*, а точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5. *Пусть* $X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ *и* $X^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$ *— два произвольных решения однородной системы* (2.15). *Тогда*

$$X^{(1)} + X^{(2)} = (x_1^{(1)} + x_1^{(2)},\ x_2^{(1)} + x_2^{(2)}, \ldots,\ x_n^{(1)} + x_n^{(2)})$$

и

$$\lambda X^{(1)} = (\lambda x_1^{(1)},\ \lambda x_2^{(1)}, \ldots,\ \lambda x_n^{(1)}),$$

где λ *— произвольное число, также являются решениями однородной системы* (2.15).

Доказательство. Однородную систему (2.15) перепишем в матричной форме:

$$AX = O$$

(см. § 2.1), а решения $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ представим в виде столбцов. Тогда

$$AX^{(1)} = O \quad \text{и} \quad AX^{(2)} = O.$$

Из этих равенств, в силу свойств произведения матриц, получим

$$A(X^{(1)} + X^{(2)}) = AX^{(1)} + AX^{(2)} = O + O = O$$

и

$$A(\lambda X^{(1)}) = \lambda AX^{(1)} = \lambda O = O,$$

а это и означает, что $X^{(1)} + X^{(2)}$ и $\lambda X^{(1)}$ являются решениями однородной системы (2.15).

Теорема доказана. □

§ 2.6. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Структура общего решения

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{array} \tag{2.18}$$

Предположим, что эта система нетривиально совместна.

Определение 2.1. Говорят, что решения однородной системы (2.18)

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}), \\ X^{(2)} &= (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X^{(k)} &= (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \end{aligned} \tag{2.19}$$

образуют ее *фундаментальную систему решений*, если они (строки (2.19)) линейно независимы и любое решение системы (2.18) является линейной комбинацией этих решений.

Если $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ..., $X^{(k)}$ — фундаментальная система решений однородной системы (2.18), то

$$X = C_1X^{(1)} + C_2X^{(2)} + \ldots + C_kX^{(k)}, \tag{2.20}$$

где C_1, C_2, ..., C_k — произвольные числа, называется *общим решением* этой системы.

То, что для произвольных чисел C_1, C_2, ..., C_k линейная комбинация (2.20) является решением системы (2.18), следует из теоремы 2.5.

Из определения фундаментальной системы решений следует, что любое решение однородной системы может быть получено из общего решения (2.20) при некоторых значениях C_1, C_2, ..., C_k.

Теорема 2.6. *Пусть* $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ..., $X^{(k)}$ *— фундаментальная система решений однородной системы* (2.18). *Тогда*

$$\operatorname{rang} A + k = n, \tag{2.21}$$

где A *основная матрица, а* n *— число неизвестных системы* (2.15).

Доказательство этой теоремы можно найти в учебниках по линейной алгебре.

Пусть ранг основной матрицы системы (2.18) равен r, причем минор r-го порядка, стоящий в левом верхнем углу этой матрицы, является базисным. Тогда согласно алгоритму нахождения решений общей системы линейных уравнений (см. § 2.4) неизвестные x_1, x_2, ..., x_r линейно выражаются через оставшиеся неизвестные x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n, количество которых равно $n - r = k$, и каждому набору чисел (x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n) соответствует некоторое решение системы (2.18).

Решения, которые соответствуют наборам чисел $e^{(1)} = (1, 0, \ldots, 0)$, $e^{(2)} = (0, 1, \ldots, 0)$, $e^{(k)} = (0, 0, \ldots, 1)$, соответственно обозначим через $X^{(1)}$, $X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$. Эти решения

и составляют фундаментальную систему решений однородной системы (2.18).

Пример 2.3. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - \ x_3 - x_4 &= 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 + \ x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Решение. Как уже было установлено в примере 2.2, ранг матрицы системы (2.22) равен двум и минор, стоящий в левом верхнем углу этой матрицы, является базисным.

Отбросим последнее уравнение данной системы и полученную систему перепишем в виде

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \ \ x_3 + x_4, \\ x_1 - x_2 &= -3x_3 - x_4. \end{aligned}$$

Из последней системы находим бесконечное множество решений системы (2.22):

$$x_3 = c_3, \quad x_4 = c_4, \quad x_1 = -x_3, \quad x_2 = 2x_3 + x_4, \tag{2.23}$$

где неизвестные x_3 и x_4 принимают произвольные значения c_3 и c_4.

Так как ранг матрицы системы (2.22) равен двум, а количество неизвестных равно четырем, то система (2.22) имеет фундаментальную систему двух решений.

В (2.23), полагая сначала $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, а затем $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, мы получим фундаментальную систему решений системы (2.22):

$$X^{(1)} = (-1, 2, 1, 0), \quad X^{(2)} = (0, 1, 0, 1).$$

Общее решение системы (2.22) имеет вид

$$X = C_1 X^{(1)} + C_2 X^{(2)} = C_1(-1, 2, 1, 0) + C_2(0, 1, 0, 1).$$

§ 2.7. Структура общего решения неоднородной системы линейных уравнений

Рассмотрим неоднородную систему m линейных уравнений с n неизвестными, записанную в матричной форме:

$$AX = B, \tag{2.24}$$

где матрицы A, X и B определяются формулами (2.2) и (2.3).

В этом параграфе мы установим связь между решениями неоднородной системы (2.24) и соответствующей ей однородной системы

$$AX = O. \tag{2.25}$$

Теорема 2.7. *Сумма любого решения неоднородной системы* (2.24) *с любым решением соответствующей ей однородной системы* (2.25) *является решением неоднородной системы* (2.24).

Доказательство. Пусть $X^{(0)}$ — решение неоднородной системы (2.24), а $X^{(1)}$ — решение соответствующей ей однородной системы (2.25), т. е.

$$AX^{(0)} = B, \quad AX^{(1)} = O.$$

Из этих равенств, учитывая свойство дистрибутивности произведения матриц (1.19), получим

$$A(X^{(0)} + X^{(1)}) = AX^{(0)} + AX^{(1)} = B + O = O.$$

А это значит, что $X^{(0)} + X^{(1)}$ — решение неоднородной системы (2.24).

Теорема доказана. □

Теорема 2.8. *Разность двух произвольных решений неоднородной системы* (2.24) *является решением соответствующей однородной системы* (2.25).

Доказательство. Пусть $X^{(0)}$ и $\widetilde{X}^{(0)}$ — произвольные решения неоднородной системы (2.24):

$$AX^{(0)} = B, \quad A\widetilde{X}^{(0)} = B.$$

Тогда

$$A(X^{(0)} - \widetilde{X}^{(0)}) = AX^{(0)} - A\widetilde{X}^{(0)} = B - B = O,$$

т. е., $X^{(0)} - \widetilde{X}^{(0)}$ — решение однородной системы (2.25).

Теорема доказана. □

Из доказанных теорем следует, что *если* $X^{(0)}$ *— частное решение неоднородной системы* (2.24), *то любое решение* X *этой системы можно представить в виде* $X = X^{(0)} + X^{(1)}$, *где* $X^{(1)}$ *— некоторое решение соответствующей неоднородной системы* (2.25).

Сумма частного решения неоднородной системы (2.24) и общего решения соответствующей однородной системы (2.25) называется *общим решением* неоднородной системы (2.24).

Пусть $X^{(0)}$ — некоторое частное решение неоднородной системы (2.24), а $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, …, $X^{(k)}$ — фундаментальная система решений соответствующей однородной системы (2.25). Тогда

$$X = X^{(0)} + C_1X^{(1)} + C_2X^{(2)} + \ldots + C_kX^{(k)}, \tag{2.26}$$

где C_1, C_2, …, C_k — произвольные постоянные, есть общее решение неоднородной системы (2.24).

Пример 2.4. Найти общее решение неоднородной системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - \ x_3 - x_4 &= 3, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1, \\ 3x_1 + x_2 + \ x_3 - x_4 &= 7. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Решение. Общее решение соответствующей однородной системы, которое было найдено в примере 2.22, имеет вид

$$C_1(-1, 2, 1, 0) + C_2(0, 1, 0, 1).$$

Нетрудно заметить, что $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ — частное решение неоднородной системы (2.27).

Следовательно,

$$X = (1, 2, 0, 0) + C_1(-1, 2, 1, 0) + C_2(0, 1, 0, 1)$$

есть общее решение системы (2.27).

§ 2.8. Метод Гаусса нахождения решений произвольной системы линейных уравнений

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 \ + a_{12}x_2 \ + \ldots \ + a_{1n}x_n \ &= b_1, \\ a_{21}x_1 \ + a_{22}x_2 \ + \ldots \ + a_{2n}x_n \ &= b_2, \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots \ + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Метод Гаусса, который будет изложен ниже, позволяет найти решения системы (2.28), если она совместна, или установить ее несовместность.

Алгоритм решения системы (2.28) по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к так называемому *ступенчатому* (в частности, *треугольному*) виду. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из полученной ступенчатой системы.

Первый этап (*прямой ход*). Не теряя общности предположим, что $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то первым в системе запишем уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля).

Преобразуем систему (2.28), исключив неизвестное x_1 из всех уравнений, кроме первого. Для этого к i-му уравнению системы (2.28) (для всех $i = 2, 3, \ldots, m$) прибавим первое уравнение, умноженное на $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$. В результате мы получим эквивалентную систему вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ \ldots + \ a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + \ \ldots + \ a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a'_{m2}x_2 + \ \ldots + \ a'_{mn}x_n &= b'_m. \end{aligned}$$

Далее предположим, что $a'_{22} \neq 0$, и аналогичным образом исключим неизвестное x_2 из всех уравнений последней системы, кроме первого и второго.

Этот процесс продолжаем до тех пор, пока это возможно. Причем, если в процессе исключения переменных появляются нулевые уравнения, т. е. равенства вида $0 = 0$, то их отбрасываем, а если появляются уравнения вида $0 = b$, где $b \neq 0$, то прекращаем выполнение алгоритма и делаем вывод, что система несовместна.

Итак, если система (2.28) совместна, то через конечное число шагов мы получим эквивалентную ей систему ступенчатого вида:

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_{11}x_1 + \widetilde{a}_{12}x_2 + \ldots + \widetilde{a}_{1r}x_r + \ldots + \widetilde{a}_{1n}x_n &= \widetilde{b}_1, \\ \widetilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \widetilde{a}_{2r}x_r + \ldots + \widetilde{a}_{2n}x_n &= \widetilde{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \widetilde{a}_{rr}x_r + \ldots + \widetilde{a}_{rn}x_n &= \widetilde{b}_r, \end{aligned} \tag{2.29}$$

где $r \leqslant n$, $\widetilde{a}_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Второй этап (*обратный ход*). В системе (2.29) неизвестные с номерами, соответствующими первым ненулевым элементам в каждой строке, оставим в левой части, а остальные

неизвестные переносим в правую часть. Получим

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}_{11}x_1 + \widetilde{a}_{12}x_2 + \ldots + \widetilde{a}_{1r}x_r &= \widetilde{b}_1 - \widetilde{a}_{1(r+1)}x_{r+1} - \ldots - \widetilde{a}_{1n}x_n,\\
\widetilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \widetilde{a}_{2r}x_r &= \widetilde{b}_2 - \widetilde{a}_{2(r+1)}x_{r+1} - \ldots - \widetilde{a}_{2n}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\widetilde{a}_{rr}x_r &= \widetilde{b}_r - \widetilde{a}_{r(r+1)}x_{r+1} - \ldots - \widetilde{a}_{rn}x_n.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Из последнего уравнения последней системы находим неизвестное x_r, выраженное через неизвестные x_{r+1}, ..., x_n. Далее подставляем значение x_r в предпоследнее уравнение системы (2.30). Из полученного уравнения неизвестное x_{r-1} также выражаем через неизвестные x_{r+1}, ..., x_n.

Продолжая этот процесс, получим выражения неизвестных x_1, ..., x_r через неизвестные x_{r+1}, ..., x_n.

Таким образом, придавая неизвестным x_{r+1}, ..., x_n произвольные значения, мы находим различные решения исходной системы (2.28).

Метод Гаусса называется также *методом последовательного исключения неизвестных*.

Пример 2.5. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 - \ x_4 &= \ 4,\\
2x_1 - \ x_2 + 2x_3 + \ x_4 &= \ 3,\\
x_1 - 3x_2 - \ x_3 + 2x_4 &= -1.
\end{aligned}$$

Решение. Исключив из второго и третьего уравнений неизвестную x_1, получим

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 - \ x_4 &= 4,\\
5x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 5,\\
5x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 5.
\end{aligned}$$

Отбросим последнее уравнение и перепишем эту систему в виде

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &= 4 - 3x_3 + \ x_4,\\
5x_2 &= 5 - 4x_3 + 3x_4.
\end{aligned}$$

Осуществляя обратный ход метода Гаусса, находим все решения исходной системы:

$$x_3 = c_3, \quad x_4 = c_4, \quad x_1 = 2 - \frac{7}{5}\,c_3 - \frac{1}{5}\,c_4, \quad x_2 = 1 - \frac{4}{5}\,c_3 + \frac{3}{5}\,c_4,$$

где c_3 и c_4 — произвольные постоянные.

Замечание 2.2. Метод Гаусса основан на приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду (см. § 1.7).

В самом деле, преобразованиям уравнений системы (2.28), очевидно, соответствуют элементарные преобразования *строк* расширенной матрицы этой системы. Следовательно, *если расширенную матрицу A^* системы* (2.28) *с помощью элементарных преобразований со строками привести к ступенчатому виду $\widetilde{A}^*$ и по этой матрице $\widetilde{A}^*$ восстановить систему уравнений*, *то полученная система будет равносильна исходной*.

Это замечание позволяет при решении систем линейных уравнений методом Гаусса преобразовать не саму систему, а ее расширенную матрицу, выполнив элементарные преобразования над *строками*.

Пример 2.6. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2,\\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1,\\ x_1 - x_2 - x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 5 & -3 & 3\\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 5 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Последней матрице соответствует система уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2,\\ 5x_2 - 3x_3 &= 3,\\ x_3 &= -1, \end{aligned}$$

которая эквивалентна исходной. Эта система, очевидно, имеет единственное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.

Глава 3

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 3.1. Понятие вектора. Основные определения

Вектор (в пространстве, на плоскости, на прямой) — это направленный отрезок, т. е. отрезок AB, взятый с одним из двух возможных направлений: от A к B или от B к A. Итак, с отрезком AB связаны два вектора: вектор $\overrightarrow{AB}$ с *началом* A и *концом* B и вектор $\overrightarrow{BA}$ с *началом* B и *концом* A (рис. 3.1).

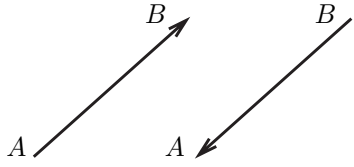


Рис. 3.1

Длина отрезка AB называется *длиной* или *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$ и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\overrightarrow{0}$. Иначе говоря, *нулевой вектор* — это вырожденный отрезок AA: $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA}$. Направление нулевого вектора считается неопределенным.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* или *ортом*.

Определение 3.1. Ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *равными*: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, если

1) они лежат на одной прямой или на параллельных прямых,

2) имеют одинаковые длины: $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ и

3) одинаково направлены, т. е. существует такой вектор $\overrightarrow{EF}$, что $ABFE$ и $CDFE$ — параллелограммы (рис. 3.2). (Следует

отметить, что здесь порядок следования вершин существенен, т. е., если $ABFE$ — параллелограмм, то $ABEF$ уже не есть параллелограмм.)

Все нулевые векторы считаются *равными* друг другу.

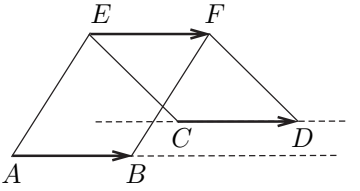


Рис. 3.2

Замечание 3.1. Из определения равенства векторов следует, что для произвольного вектора $\overrightarrow{AB}$ и произвольной точки C существует единственная точка D такая, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (рис. 3.3).

Это замечание позволяет вектор $\overrightarrow{AB}$ переносить параллельно самому себе и начало его помещать в любой точке. В этом случае говорят, что вектор приложен к данной точке или отложен от данной точки.

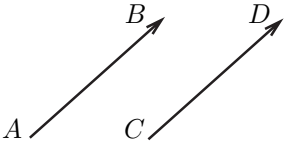


Рис. 3.3

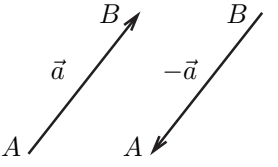


Рис. 3.4

Таким образом мы получаем класс равных векторов, которые называются *свободными векторами*. Свободные векторы будем обозначать малыми латинскими буквами. Запись $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ означает, что вектор $\overrightarrow{AB}$ является представителем свободного вектора $\vec{a}$. Если $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, а $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$, то равенство $\vec{a} = \vec{b}$ означает, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. В векторном исчислении свободный вектор называют просто вектором и при необходимости откладывают его от произвольной точки.

Вектор $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ называется *противоположным* вектору $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ (рис. 3.4).

§ 3.2. Линейные операции над векторами

Определим линейные операции над векторами: сложение и вычитание векторов, а также умножение вектора на число.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и приложим вектор a к этой точке. Получим

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Затем отложим от точки A вектор $\vec{b}$. Получим $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$ называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$ (рис. 3.5).

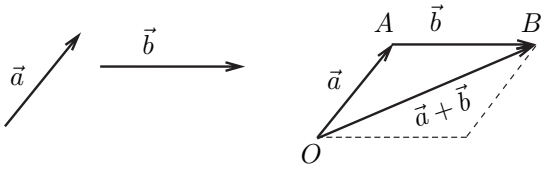


Рис. 3.5

Иначе говоря, справедливо следующее правило сложения векторов:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}. \tag{3.1}$$

Это правило сложения векторов называется *правилом треугольника* или *правилом параллелограмма*, поскольку сумма $\vec{a} + \vec{b}$ есть диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 3.5).

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} - \vec{b}$ и определяется как сумма вектора $\vec{a}$ и противоположного вектора $-\vec{b}$ (рис. 3.6), то есть,

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

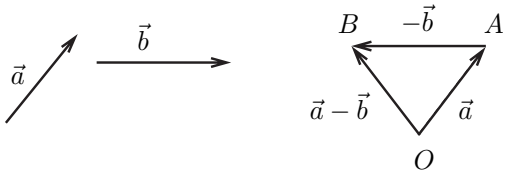


Рис. 3.6

Теперь сформулируем теорему об основных свойствах сложения векторов. Эти свойства непосредственно следуют из определения суммы двух векторов.

Теорема 3.1. *Операция сложения векторов обладает следующими основными свойствами*:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (*коммутативность*),
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (*ассоциативность*),
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0}$ (*существование нулевого вектора*),
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ (*существование противоположного вектора*),

где $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ — *произвольные векторы.*

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор, длина которого равна числу $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и который имеет направление вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное направление (т. е. направление вектора $-\vec{a}$), если $\lambda < 0$ (рис. 3.7). Произведение вектора $\vec{a}$ на число λ обозначается $\lambda\vec{a}$. В случае, когда либо $\lambda = 0$, либо $\vec{a} = \vec{0}$, полагают $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

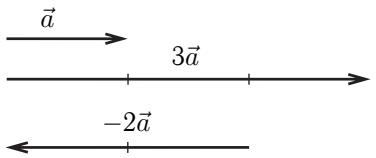


Рис. 3.7

Теорема 3.2. *Операция произведения вектора на число обладает следующими основными свойствами*:

1. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ (*ассоциативность*),
2. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ (*дистрибутивность относительно суммы векторов*),
3. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ (*дистрибутивность относительно суммы чисел*),
4. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ (*нормированность*),

где $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *— произвольные векторы, а* λ *и* μ *— произвольные числа.*

Перечисленные в теоремах 3.1 и 3.2 свойства линейных операций над векторами выбраны в качестве основных, поскольку все остальные свойства линейных операций можно получить из этих восьми. Другими словами, их удобно выбрать за аксиомы и определить важное понятие *векторного* или *линейного пространства*, что и будет сделано в гл. 7.

§ 3.3. Коллинеарные и компланарные векторы

Определение 3.2. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых (рис. 3.8). В противном случае они называются *неколлинеарными* (рис. 3.9).

Очевидно, что *нулевой вектор коллинеарен всякому вектору и каждый вектор коллинеарен самому себе.*

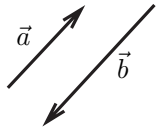


Рис. 3.8. Коллинеарные векторы

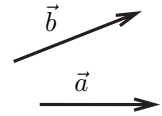


Рис. 3.9. Неколлинеарные векторы

Вектор $\vec{a}$ называется *коллинеарным прямой* l, если этот вектор лежит либо на l, либо на прямой, параллельной l.

Определение 3.3. Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются *компланарными*, если они лежат на одной плоскости или на параллельных плоскостях (рис. 3.10).

В противном случае векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются *некомпланарными* (рис. 3.11).

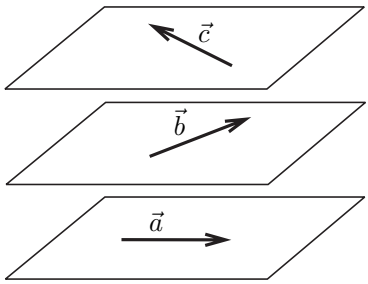


Рис. 3.10

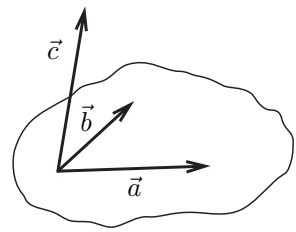


Рис. 3.11

Очевидно, что *если хотя бы один из векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *нулевой, то эти векторы компланарны.*

Теорема 3.3. *Пусть* $\vec{a}$ *— произвольный ненулевой вектор. Вектор* $\vec{b}$ *коллинеарен вектору* $\vec{a}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\vec{b} = \lambda\vec{a},$$

где λ *— однозначно определенное число.*

Доказательство. То, что для произвольного числа λ вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$, непосредственно следует из определения умножения вектора на число.

Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ — коллинеарны. Через λ обозначим число $\dfrac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|}$ ($|\overrightarrow{OA}| \neq 0$, так как $\vec{a} \neq \vec{0}$ по предположению), если векторы $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ одинаково направлены (рис. 3.12)

и число $-\dfrac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|}$, если векторы $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ противоположно направлены (рис. 3.13).

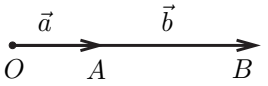


Рис. 3.12

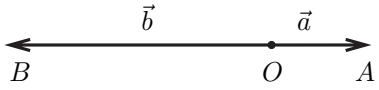


Рис. 3.13

Теперь заметим, что по определению умножения вектора на число имеем

$$\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA} = \lambda\vec{a}.$$

Теорема доказана. □

Т е о р е м а 3.4. *Пусть в плоскости даны два неколлинеарных вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Тогда любой вектор $\vec{a}$ этой плоскости единственным способом разлагается в виде*

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2, \tag{3.2}$$

где x_1 и x_2 — однозначно определенные числа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ отложим от некоторой точки O. Получим $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$. Не теряя общности, предположим, что $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ (рис. 3.14).

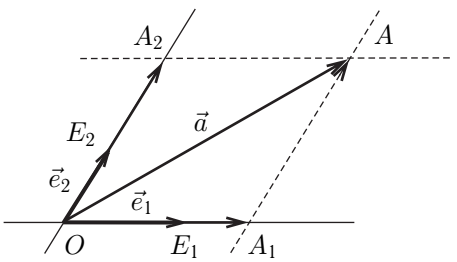


Рис. 3.14

Пусть A_1 — точка пересечения прямой, проходящей через точку A параллельно прямой OE_2, с прямой OE_1, а A_2 — точка пересечения прямой, проходящей через точку A параллельно прямой OE_1, с прямой OE_2. Вектор $\overrightarrow{OA}_1$, который называется *проекцией вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ на прямую OE_1 параллельно другой прямой OE_2*, коллинеарен вектору $\vec{e}_1$, следовательно (в силу теоремы 3.3)

$$\overrightarrow{OA}_1 = x_1\vec{e}_1,$$

где x_1 — некоторое однозначно определенное число. Точно так же вектор $\overrightarrow{OA}_2$ (проекция вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ на прямую OE_2 вдоль прямой OE_1), коллинеарен вектору $\vec{e}_2$, следовательно (в силу теоремы 3.3),

$$\overrightarrow{OA}_2 = x_2\vec{e}_2,$$

где x_2 — некоторое тоже однозначно определенное число. Но тогда

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2.$$

Теорема доказана. □

Теорема 3.5. *Пусть в пространстве даны три некомпланарных вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$. Тогда любой вектор $\vec{a}$ этого пространства единственным способом разлагается в виде*:

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, \tag{3.3}$$

где x_1, x_2 и x_3 — однозначно определенные числа.

Доказательство. Пусть $\vec{a}$ — произвольный вектор пространства. Не теряя общности, предположим, что все векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{a}$ отложены от некоторой точки O. Пусть $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE}_1$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE}_2$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OE}_3$, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ (рис. 3.15).

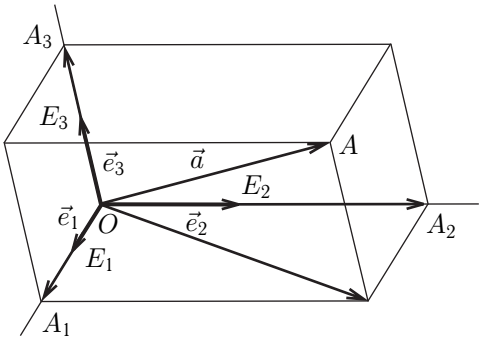


Рис. 3.15

Через точку A проведем плоскость параллельно плоскости, несущей прямые OE_2 и OE_3. Точку пересечения этой плоскости с прямой OE_1 обозначим через A_1. Точка A_1 (вектор $\overrightarrow{OA}_1$) называется *проекцией точки A (вектора $\overrightarrow{OA}$) на прямую OE_1 параллельно указанной плоскости*. Подобные же проекции точки A на прямые OE_2 и OE_3 обозначим через A_2 и A_3 соответственно.

В силу теоремы 3.3 имеем

$$\overrightarrow{OA}_1 = x_1\vec{e}_1,$$
$$\overrightarrow{OA}_2 = x_2\vec{e}_2,$$
$$\overrightarrow{OA}_3 = x_3\vec{e}_3.$$

Но тогда

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3 = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3.$$

Теорема доказана. □

§ 3.4. Координата вектора и точки на прямой

Пусть O — произвольная точка прямой l. Отложим от точки O произвольный ненулевой вектор $\vec{e}$. Тогда говорят, что на прямой задан *репер* $(O, \vec{e})$.

Длину вектора $\vec{e}$ примем за масштабную единицу на прямой, а его направление — за положительное направление прямой. Тогда прямая l называется *числовой прямой* или *числовой осью* (рис. 3.16). В этом случае говорят также, что на прямой l задана *система координат*.

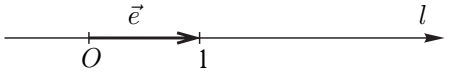


Рис. 3.16

В силу теоремы 3.3 любой вектор $\vec{a}$ прямой l единственным способом получается умножением вектора $\vec{e}$ на некоторое число λ:

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{e}.$$

Число λ называется *координатой вектора* $\vec{a}$ относительно репера $(O, \vec{e})$ или относительно вектора $\vec{e}$.

Заметим, что $|\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{e}| = |\lambda| \cdot 1 = |\lambda|$. Итак, *координата вектора* $\vec{a}$ *есть число, модуль которого равен его длине, а знак положителен, если направление этого вектора положительно* (*т. е. совпадает с направлением вектора* $\vec{e}$), *и отрицателен в противном случае*.

Пусть A — произвольная точка числовой прямой l. *Координатой точки* A называется координата вектора $\overrightarrow{OA}$ (рис. 3.17).

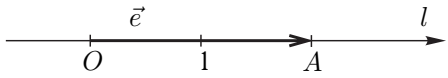


Рис. 3.17

Ставя в соответствие каждой точке прямой ее координату, мы тем самым получаем взаимно-однозначное соответствие между всеми точками прямой и всеми действительными числами.

§ 3.5. Аффинная система координат на плоскости. Координаты вектора и точки на плоскости

Пусть O — произвольная точка плоскости, а $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — неколлинеарные векторы этой плоскости, отложенные от точки O (рис. 3.18). Тогда говорят, что на плоскости задан *репер* $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

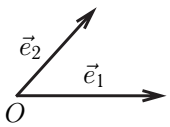


Рис. 3.18

Аффинная система координат на плоскости задается репером $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$: начало O этого репера принимается за начало аффинной системы координат; прямые, на которых лежат векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — за оси координат; длины этих векторов — за масштабные единицы на осях, а направления векторов — за положительные направления осей (рис. 3.19). Ось, на которой лежит вектор $\vec{e}_1$ называется также *осью абсцисс* или *осью* Ox, а ось, на которой лежит вектор $\vec{e}_2$, — *осью ординат* или *осью* Oy. Аффинная система координат обозначается через $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ или Oxy.

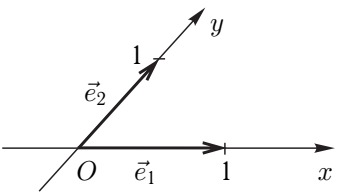


Рис. 3.19

Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ — произвольный вектор плоскости. В силу теоремы 3.4 вектор $\vec{a}$ единственным способом разлагается в виде

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2. \qquad (3.4)$$

Однозначно определенные коэффициенты x_1 и x_2 этого разложения называются *координатами вектора* $\vec{a}$ относительно репера $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, или относительно аффинной системы координат Oxy.

Замечание 3.2. Заметим, что первая координата x_1 вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ — это координата вектора $\overrightarrow{OA}_1$ (т. е. проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ на прямую OE_1 параллельно прямой OE_2) отно-

сительно единичного вектора $\vec{e}_1$, а вторая координата x_2 вектора $\vec{a}$ — это координата вектора $\overrightarrow{OA_2}$ (т. е. проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ на прямую OE_2 параллельно прямой OE_1) относительно единичного вектора $\vec{e}_2$ (рис. 3.20).

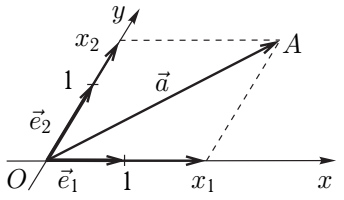


Рис. 3.20

Вектор $\vec{a}$ с координатами x_1 и x_2 обозначается так: $\vec{a} = (x_1, x_2)$.

Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты. То есть, если $\vec{a} = (a_1, a_2)$, а $\vec{b} = (b_1, b_2)$, то

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2. \end{cases}$$

Пусть теперь A — произвольная точка плоскости. Вектор $\overrightarrow{OA}$ называется *радиус-вектором* точки A. Координаты радиус-вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ в данной аффинной системе координат называются *координатами точки* A в этой системе. Если точка A имеет координаты x и y (т. е. $\overrightarrow{OA} = (x, y)$), то пишут $A = (x, y)$, или просто $A(x, y)$; число x называется *абсциссой*, а y — *ординатой* точки A.

Координаты (x, y) полностью определяют положение точки на плоскости, т. е. каждой паре чисел (x, y) соответствует единственная точка A на плоскости, и наоборот.

§ 3.6. Аффинная система координат в пространстве. Координаты вектора и точки в пространстве

Пусть O — произвольная точка пространства. Если от точки O отложены некомпланарные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ этого пространства, то говорят, что в пространстве задан *репер* $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (рис. 3.21).

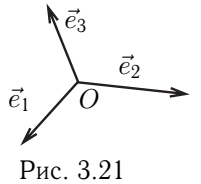


Рис. 3.21

Репером $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ задается *аффинная система координат* в пространстве следующим образом: начало O этого репера принимается за начало аффинной системы координат; прямые, на которых лежат векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$, — за оси координат; длины этих векторов — за масштабные единицы на осях, а направления векторов — за положительные направления осей (рис. 3.22). Ось, на которой лежит вектор $\vec{e}_1$, называется *осью абсцисс* или *осью* Ox; ось, на которой лежит вектор $\vec{e}_2$, — *осью ординат* или *осью* Oy; а ось, на которой лежит вектор $\vec{e}_3$, — *осью аппликат* или *осью* Oz.

Каждые две координатные оси определяют проходящую через них *координатную плоскость*. Оси Ox и Oy определяют координатную плоскость Oxy. Итак, имеем три координатные плоскости: Oxy, Oyz и Oxz.

Аффинная система координат обозначается через $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ или $Oxyz$.

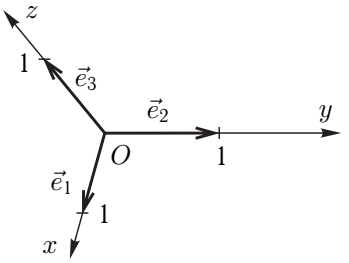


Рис. 3.22

Координаты произвольного вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ пространства определяются точно так же, как это было сделано в случае плоскости: однозначно определенные коэффициенты x_1, x_2 и x_3 разложения

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

(см. теорему 3.5) называются *координатами вектора* $\vec{a}$ относительно репера $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, или относительно аффинной системы координат $Oxyz$.

Замечание 3.3. Заметим, что первая координата x_1 вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ — это координата вектора $\overrightarrow{OA}_1$ (т. е. проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ на прямую OE_1 вдоль плоскости, содержащей прямые OE_2 и OE_3) относительно единичного вектора $\vec{e}_1$. Точно так же, x_2 — координата вектора $\overrightarrow{OA}_2$ относительно единичного

вектора $\vec{e}_2$ и x_3 — координата вектора $\overrightarrow{OA_3}$ относительно единичного вектора $\vec{e}_3$ (рис. 3.23).

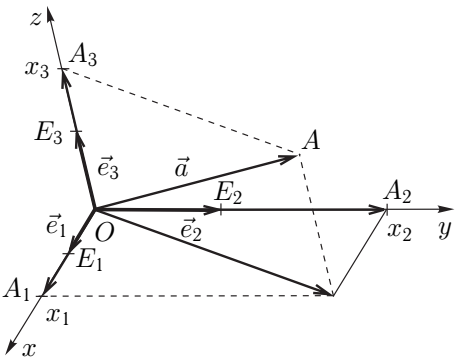


Рис. 3.23

Вектор $\vec{a}$ с координатами x_1, x_2 и x_3 обозначается так: $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$.

Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты. То есть, если $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, а $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2, \\ a_3 = b_3. \end{cases}$$

Пусть теперь A — произвольная точка пространства. Координаты *радиус-вектора* $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ называются *координатами точки* A в данной аффинной системе координат. Если точка A имеет координаты x, y и z, то пишут $A = (x, y, z)$, или просто $A(x, y, z)$; число x называется *абсциссой*, y — *ординатой*, а z — *аппликатой* точки A (рис. 3.24).

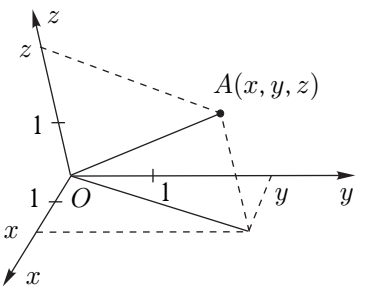


Рис. 3.24

Координаты (x, y, z) полностью определяют положение точки в пространстве, т. е. каждой тройке чисел (x, y, z) соответствует единственная точка A пространства, и наоборот.

§ 3.7. Координаты суммы векторов и произведения вектора на число

Пусть в пространстве задана некоторая аффинная система координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

Теорема 3.6. *Координаты суммы двух векторов равны сумме соответствующих координат слагаемых векторов. Другими словами, если* $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{b} = (y_1, y_2, y_3)$, *то*

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3). \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{b} = (y_1, y_2, y_3)$. По определению координат вектора это значит, что

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3,$$
$$\vec{b} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3.$$

Из этих представлений и из основных свойств линейных операций над векторами (см. теоремы 3.1 и 3.2) следует:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) + (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) = \\ &= (x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_1) + (x_2\vec{e}_2 + y_2\vec{e}_2) + (x_3\vec{e}_3 + y_3\vec{e}_3) = \\ &= (x_1 + y_1)\vec{e}_1 + (x_2 + y_2)\vec{e}_2 + (x_3 + y_3)\vec{e}_3.\end{aligned}$$

А это значит, что $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$.

Теорема доказана. □

Следствие 3.1. *Если* $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{b} = (y_1, y_2, y_3)$, *то*

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3). \tag{3.6}$$

Доказательство.

Сначала заметим, что $-\vec{b}=(-y_1, -y_2, -y_3)$ (ведь $\vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{0}$). Учитывая это замечание и формулу (3.5), получим

$$\begin{aligned}\vec{a} - \vec{b} &= \vec{a} + (-\vec{b}) = \\ &= [x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3] + [(-y_1)\vec{e}_1 + (-y_2)\vec{e}_2 + (-y_3)\vec{e}_3] =\end{aligned}$$

$$= [x_1\vec{e}_1 + (-y_1)\vec{e}_1] + [x_2\vec{e}_2 + (-y_2)\vec{e}_2] + [x_3\vec{e}_3 + (-y_3)\vec{e}_3] =$$
$$= (x_1 - y_1)\vec{e}_1 + (x_2 - y_2)\vec{e}_2 + (x_3 - y_3)\vec{e}_3,$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 3.2. *Пусть* $A(x_1, y_1, z_1)$ *и* $B(x_2, y_2, z_2)$ *— произвольные точки пространства. Тогда*

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \tag{3.7}$$

Иначе говоря, координаты вектора суть разности соответствующих координат его конца и начала.

Доказательство. Заметим, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (рис. 3.25).

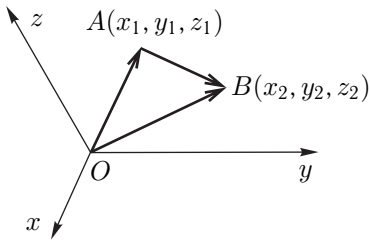


Рис. 3.25

По определению координат точки имеем $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$. Но тогда по формуле (3.6) получим

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Следствие доказано. □

Теорема 3.7. *Координаты произведения вектора* $\vec{a}$ *на число* λ *равны произведениям соответствующих координат вектора* $\vec{a}$ *на то же число* λ. *Другими словами, если* $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$, *то*

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$

Доказательство. Пусть $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$. По определению координат вектора это значит, что

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3.$$

Теперь вычислим произведение $\lambda\vec{a}$, учитывая основные свойства линейных операций над векторами (см. теоремы 3.1 и 3.2):

$$\lambda\vec{a} = \lambda(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) =$$
$$= \lambda(x_1\vec{e}_1) + \lambda(x_2\vec{e}_2) + \lambda(x_3\vec{e}_3) =$$
$$= (\lambda x_1)\vec{e}_1 + (\lambda x_2)\vec{e}_2 + (\lambda x_3)\vec{e}_3.$$

А это значит, что $\lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$.

Теорема доказана. □

§ 3.8. Условие коллинеарности двух векторов. Деление отрезка в данном отношении

Пусть в пространстве задана аффинная система координат $Oxyz$. Выясним условие коллинеарности двух векторов, заданных своими координатами.

Теорема 3.8. *Векторы $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{b} = (y_1, y_2, y_3)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т. е. когда справедливы равенства*

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}. \tag{3.8}$$

Доказательство. В силу теоремы 3.3 векторы $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{b} = (y_1, y_2, y_3)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует такое число λ, что

$$\vec{a} = \lambda\vec{b},$$

или, в координатной записи,

$$x_1 = \lambda y_1, \qquad x_2 = \lambda y_2, \qquad x_3 = \lambda y_3. \tag{3.9}$$

Из этих равенств получаем

$$\frac{x_1}{y_1} = \lambda, \qquad \frac{x_2}{y_2} = \lambda, \qquad \frac{x_3}{y_3} = \lambda,$$

откуда и следует формула (3.8). При этом обращение какого-нибудь из знаменателей в нуль означает, в соответствии с равенством (3.9), что и числитель этой дроби равен нулю.

Теорема доказана. □

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$ коллинеарны. Тогда существует такое число λ, что $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ (см. теорему 3.3). Число λ называется *отношением вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$* и обозначается $\vec{a} : \vec{b}$:

$$\lambda = \vec{a} : \vec{b}.$$

Пусть теперь $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ — произвольные точки пространства, а $M(x, y, z)$ — точка, лежащая на прямой AB.

Говорят, что *точка M делит отрезок AB в отношении λ*, если

$$\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = \lambda.$$

Заметим, что все точки прямой AB делят отрезок AB в каком-то отношении, кроме точки $M = B$, так как $\overrightarrow{AB} \neq \lambda \overrightarrow{BB}$ ни при каком λ (рис. 3.26). Точке $M = A$ соответствует число $\lambda = 0$, а середине отрезка AB — число $\lambda = 1$.

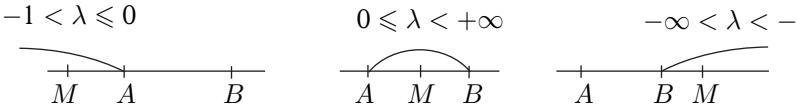


Рис. 3.26

С другой стороны, каждому числу λ соответствует некоторая точка M прямой AB, которая делит отрезок AB в отношении λ, кроме числа $\lambda = -1$, поскольку если $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{MB}$, то $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = 0$, откуда следует, что $A = B$ вопреки предположению. Если $\lambda < 0$, то точка M лежит вне отрезка AB и в этом случае говорят также, что точка M делит отрезок AB внешним образом.

Теперь решим следующую задачу.

Задача. По координатам точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ найти координаты точки $M(x, y, z)$, которая делит отрезок AB в отношении λ.

По условию верно соотношение

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}. \tag{3.10}$$

Так как $\overrightarrow{AM} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, а $\overrightarrow{MB} = (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$, то в координатной записи равенство (3.10) эквивалентно следующим трем равенствам:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Решая эти равенства относительно x, y, и z соответственно, получим искомые координаты точки M:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \\ z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Из последних формул при $\lambda = 1$ находятся координаты середины отрезка AB:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \\ z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}. \end{cases} \tag{3.12}$$

Замечание 3.4. Все изложенное в этом параграфе с очевидными изменениями справедливо и в случае плоскости.

§ 3.9. Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Ортогональные проекции

Пусть на плоскости (в пространстве) задана единица измерения, посредством которой измеряются длины всех отрезков на плоскости (в пространстве). Такую единицу длины называют *масштабом*.

На плоскости (в пространстве) рассмотрим аффинную систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ($O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$), единичные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$) которой являются *взаимно перпендикулярными ортами*. Эти орты обозначим через $\vec{i}$, $\vec{j}$ ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), соответственно, и предположим, что в случае плоскости кратчайший поворот от орта $\vec{i}$ к орту $\vec{j}$ совершается против часовой стрелки (рис. 3.27), а в случае пространства — что с конца орта $\vec{k}$ кратчайший поворот от орта $\vec{i}$ к орту $\vec{j}$ виден совершающимся против часовой стрелки (рис. 3.28). Тогда говорят, что на плоскости (в пространстве) задана *прямоугольная* (*или декартова*) *система координат* Oxy ($Oxyz$).

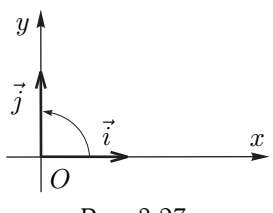


Рис. 3.27

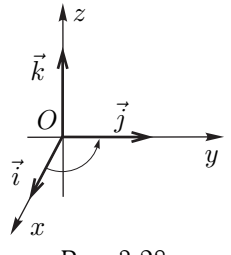


Рис. 3.28

Пусть на плоскости дан вектор $\vec{a} = (x_1, y_1)$. Приложим вектор $\vec{a}$ к началу координат: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ (рис. 3.29). Как уже было установлено в параграфе 3.5 (см. замечание 3.2), *первая*

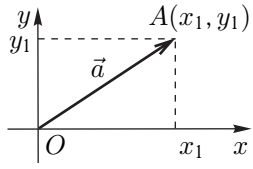


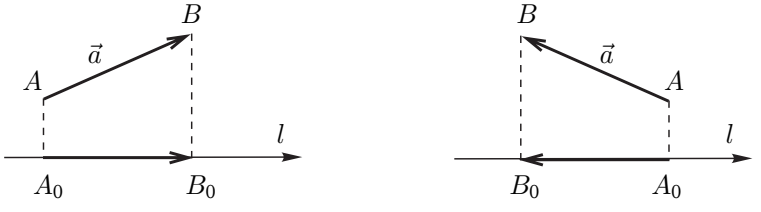
Рис. 3.29

координата x_1 вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ — это координата проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ на ось Ox параллельно оси Oy относительно орта $\vec{i}$, а вторая координата x_2 вектора $\vec{a}$ — это координата проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ на ось Oy параллельно оси Ox относительно орта $\vec{j}$.

Поскольку орты $\vec{i}$ и $\vec{j}$ взаимно перпендикулярны, то проекцию вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ (точки A) на ось Ox параллельно оси Oy естественно называть *ортогональной проекцией вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ (точки A) на ось Ox.*

Итак, *координата x_1 (соответственно, y_1) вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ — это длина ортогональной проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ на ось Ox (соответственно, Oy), взятая с положительным знаком, если эта проекция и ось Ox (соответственно, Oy) одинаково направлены, и с отрицательным знаком, если они противоположно направлены.*

Пусть l — числовая ось. Длину ортогональной проекции вектора $\vec{a}$ на ось l, взятую с положительным знаком, если эта проекция и ось l одинаково направлены (см. рис. 3.30 *а*)) и с отрицательным знаком, если они противоположно направлены (см. рис. 3.30 *б*)) назовем *алгебраическим значением ортогональной проекции вектора $\vec{a}$ на ось l* и обозначим через $\mathrm{pr}_l\vec{a}$.



а) $\mathrm{pr}_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{A_0B_0}|$ *б)* $\mathrm{pr}_l\overrightarrow{AB} = -|\overrightarrow{A_0B_0}|$

Рис. 3.30

В случае, когда рассматриваются проекции вектора $\vec{a}$ на оси Ox и Oy, вместо $\mathrm{pr}_l\vec{a}$ пишут $\mathrm{pr}_x\vec{a}$ и $\mathrm{pr}_y\vec{a}$, соответственно. Теперь заметим, что в этих обозначениях для координат вектора $\vec{a} = (x_1, y_1)$ справедливы равенства

$$x_1 = \mathrm{pr}_x\vec{a}, \quad y_1 = \mathrm{pr}_y\vec{a}. \tag{3.13}$$

Для пространственного вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ аналогично имеем (рис. 3.31):

$$x_1 = \mathrm{pr}_x \vec{a}, \quad y_1 = \mathrm{pr}_z \vec{a}, \quad z_1 = \mathrm{pr}_y \vec{a}. \tag{3.14}$$

Итак, *прямоугольные координаты вектора суть алгебраические значения его ортогональных проекций на координатные оси*.

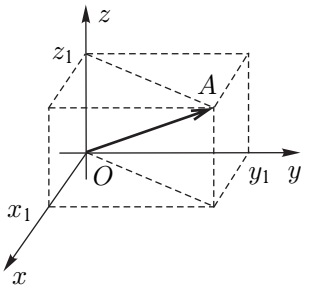


Рис. 3.31

§ 3.10. Свойства ортогональных проекций

Теорема 3.9. *Алгебраическое значение* $\mathrm{pr}_l \vec{a}$ *ортогональной проекции вектора* $\vec{a}$ *на ось* l *равно произведению длины вектора* $\vec{a}$ *на косинус угла между вектором* $\vec{a}$ *и осью* l:

$$\mathrm{pr}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi, \tag{3.15}$$

где $\varphi = \angle(\vec{a}, l)$.

Доказательство. Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\varphi = \angle(\vec{a}, l)$. Рассмотрим несколько случаев.

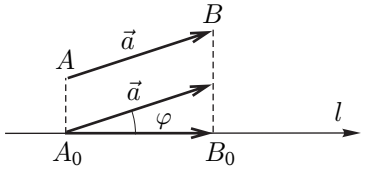


Рис. 3.32

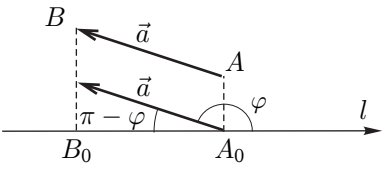


Рис. 3.33

Случай 1. Пусть угол φ — острый (рис. 3.32). Тогда

$$\mathrm{pr}_l \vec{a} = \mathrm{pr}_l \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{A_0 B_0}| = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi.$$

Случай 2. Пусть угол φ — тупой (рис. 3.33). Тогда

$$\mathrm{pr}_l \vec{a} = \mathrm{pr}_l \overrightarrow{AB} = -|\overrightarrow{A_0 B_0}| = -|\vec{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi.$$

Случай 3. Пусть угол φ — прямой (рис. 3.34). Тогда

$$\mathrm{pr}_l\vec{a} = 0 = |\vec{a}| \cdot \cos\frac{\pi}{2} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi.$$

Теорема доказана. □

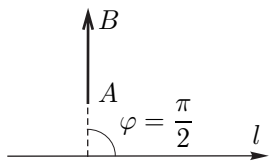


Рис. 3.34

Из формулы (3.15) немедленно следует, что *алгебраическое значение ортогональной проекции вектора на ось положительно, если вектор образует с осью острый угол; отрицательно, если — тупой угол; и равно нулю, если этот угол — прямой.*

Теорема 3.10. *Алгебраическое значение ортогональной проекции суммы двух векторов равно сумме алгебраических значений ортогональных проекций этих векторов, т. е. справедлива формула*

$$\mathrm{pr}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \mathrm{pr}_l\vec{a} + \mathrm{pr}_l\vec{b}, \tag{3.16}$$

где $\vec{a}$, $\vec{b}$ — произвольные векторы, а l — числовая ось.

Доказательство. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные ненулевые векторы (теорема очевидна в случае, когда хотя бы один из этих векторов — нулевой). Не теряя общности, предположим, что $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, а $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Ортогональные проекции точек A, B и C обозначим соответственно через A_0, B_0 и C_0. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. $\mathrm{pr}_l\vec{a} > 0$ и $\mathrm{pr}_l\vec{b} > 0$ (рис. 3.35). Тогда

$$\mathrm{pr}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \mathrm{pr}_l\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{A_0C_0}| = |\overrightarrow{A_0B_0} + |\overrightarrow{B_0C_0}| = \mathrm{pr}_l\vec{a} + \mathrm{pr}_l\vec{b}.$$

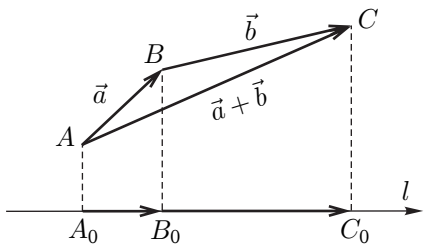


Рис. 3.35

Случай 2. $\mathrm{pr}_l\vec{a} < 0$ и $\mathrm{pr}_l\vec{b} < 0$ (рис. 3.36). Тогда

$$\mathrm{pr}_l(\vec{a}+\vec{b}) = \mathrm{pr}_l\overrightarrow{AC} = -|\overrightarrow{A_0C_0}| = \\ = -(|\overrightarrow{A_0B_0} + |\overrightarrow{B_0C_0}|) = -|\overrightarrow{A_0B_0} - |\overrightarrow{B_0C_0}| = \mathrm{pr}_l\vec{a} + \mathrm{pr}_l\vec{b}.$$

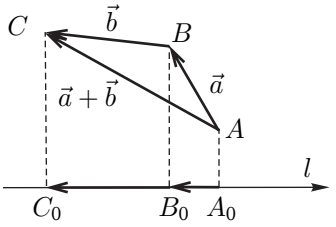


Рис. 3.36

Случай 3. $\mathrm{pr}_l\vec{a} > 0$ и $\mathrm{pr}_l\vec{b} < 0$.

а) если $\mathrm{pr}_l(\vec{a}+\vec{b}) > 0$ (рис. 3.37), то

$$\mathrm{pr}_l(\vec{a}+\vec{b}) = \mathrm{pr}_l\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{A_0C_0}| = |\overrightarrow{A_0B_0} - |\overrightarrow{B_0C_0}| = \mathrm{pr}_l\vec{a} + \mathrm{pr}_l\vec{b};$$

б) если $\mathrm{pr}_l(\vec{a}+\vec{b}) < 0$ (рис. 3.38), то

$$\mathrm{pr}_l(\vec{a}+\vec{b}) = \mathrm{pr}_l\overrightarrow{AC} = -|\overrightarrow{A_0C_0}| = \\ = -(|\overrightarrow{B_0C_0} - |\overrightarrow{A_0B_0}|) = |\overrightarrow{A_0B_0}| - |\overrightarrow{B_0C_0}| = \mathrm{pr}_l\vec{a} + \mathrm{pr}_l\vec{b};$$

в) если $\mathrm{pr}_l(\vec{a}+\vec{b}) = 0$ (рис. 3.39), то

$$\mathrm{pr}_l(\vec{a}+\vec{b}) = \mathrm{pr}_l\overrightarrow{AC} = 0 = \\ = |\overrightarrow{A_0B_0}| - |\overrightarrow{B_0A_0}| = |\overrightarrow{A_0B_0}| - |\overrightarrow{B_0C_0}| = \mathrm{pr}_l\vec{a} + \mathrm{pr}_l\vec{b}.$$

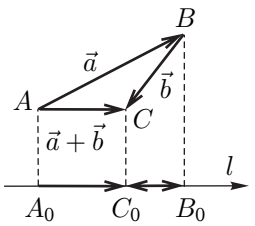


Рис. 3.37

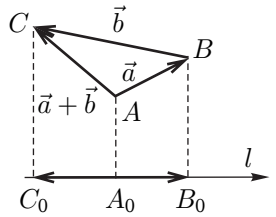


Рис. 3.38

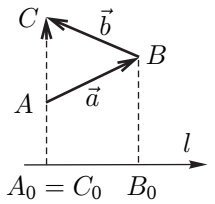


Рис. 3.39

Теорема доказана. □

Теорема 3.11. *Алгебраическое значение ортогональной проекции произведения числа λ на вектор $\vec{a}$ равно произведению числа λ на алгебраическое значение ортогональной*

проекции вектора $\vec{a}$:

$$\mathrm{pr}_l(\lambda\vec{a}) = \lambda \cdot \mathrm{pr}_l\vec{a}, \tag{3.17}$$

где l *— числовая ось.*

Доказательство. Справедливость формулы (3.17) очевидна при $\lambda = 0$. Теперь рассмотрим отдельно случаи $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$.

Случай 1. $\lambda > 0$ (рис. 3.40). По формуле (3.15) имеем

$$\mathrm{pr}_l(\lambda\vec{a}) = |\lambda\vec{a}| \cdot \cos\varphi = \lambda \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\varphi = \lambda \cdot \mathrm{pr}_l\vec{a}.$$

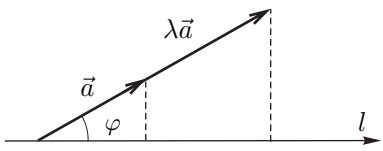


Рис. 3.40

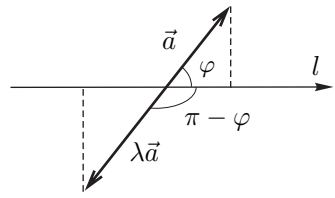


Рис. 3.41

Случай 2. $\lambda < 0$ (рис. 3.41). По той же формуле (3.15) получим

$$\mathrm{pr}_l(\lambda\vec{a}) = |\lambda\vec{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = \\ = -\lambda \cdot |\vec{a}| \cdot (-\cos\varphi) = \lambda \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\varphi = \lambda \cdot \mathrm{pr}_l\vec{a}.$$

Теорема доказана. □

§ 3.11. Длина вектора. Расстояние между двумя точками

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{a} = (x_1, y_1)$. Приложим вектор $\vec{a}$ к началу координат: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ (рис. 3.42). Ортогональную проекцию точки A на ось Ox обозначим через A'.

Из прямоугольного треугольника $OA'A$ по теореме Пифагора имеем

$$|OA|^2 = |OA'|^2 + |A'A|^2,$$

или

$$|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2.$$

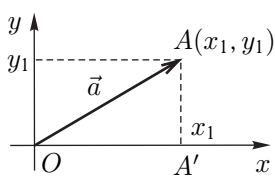


Рис. 3.42

То есть, *квадрат длины вектора равен сумме квадратов его координат.*

Итак, для длины вектора $\vec{a} = (x_1, y_1)$ в *прямоугольных координатах* получили формулу

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,. \tag{3.18}$$

Аналогично для длины пространственного вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ в *прямоугольных координатах* имеем формулу

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,. \tag{3.19}$$

Из (3.18) непосредственно получается следующая *формула вычисления расстояния d между точками* $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ (рис. 3.43):

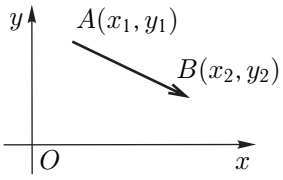


Рис. 3.43

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \tag{3.20}$$

Действительно, для этого достаточно заметить, что искомое расстояние d равно длине вектора $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Аналогично для расстояния d между двумя точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ в пространстве имеем

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \tag{3.21}$$

§ 3.12. Направляющие косинусы

Пусть в пространстве задана прямоугольная система координат $Oxyz$. Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$. Углы между вектором $\vec{a}$ и ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ координатных осей обозначим через α, β и γ, соответственно (рис. 3.44).

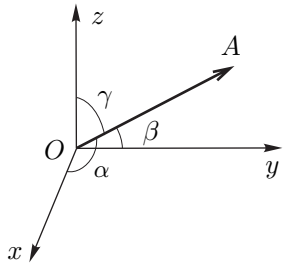


Рис. 3.44

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$.

Из теоремы 3.9 и равенств (3.14) следует:

Теорема 3.12. *Прямоугольные координаты вектора* $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ *вычисляются формулами*

$$x_1 = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha, \quad y_1 = |\vec{a}| \cdot \cos\beta, \quad z_1 = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma. \tag{3.22}$$

В частности, если вектор $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ есть орт (т. е. $|\vec{a}| = 1$), то в силу (3.22) имеем

$$x_1 = \cos\alpha, \quad y_1 = \cos\beta, \quad z_1 = \cos\gamma. \tag{3.23}$$

Иначе говоря, *координаты орта равны его направляющим косинусам*.

Теперь, учитывая формулы (3.22), вычислим квадрат длины вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ согласно (3.19):

$$|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = |\vec{a}|^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma),$$

откуда, сокращая на $|\vec{a}|^2 \neq 0$, получим

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{3.24}$$

Итак, *сумма квадратов направляющих косинусов любого ненулевого вектора равна единице*.

Верно и обратное, *произвольные три числа* ξ, η, ζ, *которые удовлетворяют равенству*

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \tag{3.25}$$

являются направляющими косинусами некоторого вектора. В самом деле, в силу (3.25), вектор $\vec{a} = (\xi, \eta, \zeta)$ есть орт и, следовательно, ξ, η, ζ суть направляющие косинусы этого вектора (см. (3.23)).

Замечание 3.5. Все изложенное в этом параграфе с очевидными изменениями справедливо и в случае плоскости.

§ 3.13. Скалярное произведение двух векторов. Основные свойства

Скалярное произведение является одним из фундаментальных понятий математики. Для определения этого понятия нужно иметь на плоскости или в пространстве единый для всех отрезков масштаб.

Определение 3.4. *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор полагается равным нулю.

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$. Итак, по определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi, \tag{3.26}$$

где $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Напомним, что *углом между векторами* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший из двух углов между этими векторами (рис. 3.45):

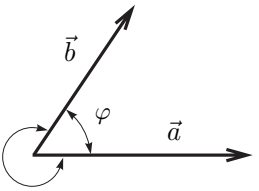


Рис. 3.45

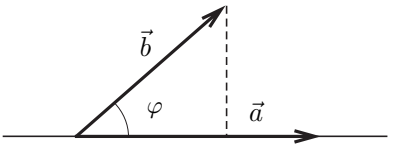


Рис. 3.46

В силу теоремы 3.9 произведение $|\vec{b}| \cos \varphi$ равно алгебраическому значению ортогональной проекции вектора $\vec{b}$ на ось, определенную вектором $\vec{a}$ (рис. 3.46):

$$|\vec{b}| \cos \varphi = \mathrm{pr}_{\vec{a}} \vec{b}. \tag{3.27}$$

Точно так же получаем

$$|\vec{a}| \cos \varphi = \mathrm{pr}_{\vec{b}} \vec{a}. \tag{3.28}$$

Учитывая равенства (3.27) и (3.27), формуле (3.26) скалярного произведения можно придать вид:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \mathrm{pr}_{\vec{a}} \vec{b}, \tag{3.29}$$

или

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \mathrm{pr}_{\vec{b}} \vec{a}. \tag{3.30}$$

Иначе говоря, *скалярное произведение двух векторов равно произведению длины одного из них на алгебраическое значение ортогональной проекции другого вектора на ось, определенную первым вектором.*

Теорема 3.13. *Скалярное произведение двух векторов обладает следующими основными свойствами*:

1) *коммутативность*:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \tag{3.31}$$

2) *дистрибутивность*:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, \tag{3.32}$$

3) *однородность*:

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}), \tag{3.33}$$

4) *положительная определенность*:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} > 0 \qquad (\vec{a} \neq \vec{0}). \tag{3.34}$$

Доказательство. Свойство коммутативности непосредственно следует из определения скалярного произведения (см. (3.26)), так как угол между двумя векторами не зависит от того, какое из них считать первым.

Докажем свойство дистрибутивности, т. е. формулу (3.32). Применяя формулы (3.29) и (3.16), получим

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot \mathrm{pr}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot (\mathrm{pr}_{\vec{a}}\, \vec{b} + \mathrm{pr}_{\vec{a}}\, \vec{c}) =$$

$$= |\vec{a}| \cdot \mathrm{pr}_{\vec{a}}\, \vec{b} + |\vec{a}| \cdot \mathrm{pr}_{\vec{a}}\, \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Для доказательства свойства однородности следует применить формулы (3.30) и (3.17):

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \mathrm{pr}_{\vec{b}}\, (\lambda \vec{a}) = \lambda(|\vec{b}| \cdot \mathrm{pr}_{\vec{b}}\, \vec{a}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Наконец заметим, что при $\vec{a} \neq \vec{0}$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2 > 0; \tag{3.35}$$

итак, свойство положительной определенности тоже доказано.

Теорема полностью доказана. □

Замечание 3.6. Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на самого себя называется *скалярным квадратом вектора* $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$. Заметим, что формулой (3.35) было доказано, что *скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины*:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2. \tag{3.36}$$

Из последней формулы следует, что *длина вектора равна корню квадратному из его скалярного квадрата*:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}\,. \tag{3.37}$$

Замечание 3.7. Из формулы (3.26) получаем следующее выражение для косинуса угла φ между двумя векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}, \tag{3.38}$$

или, учитывая (3.37),

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\sqrt{\vec{a}^2}\cdot\sqrt{\vec{b}^2}}. \tag{3.39}$$

Итак, мы пришли к важному заключению: *длина вектора и угол между двумя векторами вычисляются лишь с помощью скалярного произведения* (см. формулы (3.37) и (3.39)).

§ 3.14. Выражение скалярного произведения через прямоугольные координаты

Теорема 3.14. *Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы взаимно перпендикулярны. То есть,*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\perp\vec{b}, \tag{3.40}$$

где $\vec{a}\neq 0$, $\vec{b}\neq 0$.

Доказательство. Пусть $\vec{a}\neq 0$, $\vec{b}\neq 0$, и $\varphi=\angle(\vec{a},\vec{b})$.

Из того, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi=0$ следует равенство $\cos\varphi=0$, т. е. $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, или $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Теперь предположим, что $\vec{a}\perp\vec{b}$, т. е. $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. Тогда $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{2}=0$.

Теорема доказана. □

Пусть теперь на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy. Из последней теоремы следует, что

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0, \tag{3.41}$$

где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — орты данной прямоугольной системы координат.

Из формулы же (3.36) следуют равенства

$$\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=1. \tag{3.42}$$

Теперь мы готовы доказать основную теорему этого параграфа.

Теорема 3.15. *В прямоугольных координатах скалярное произведение векторов*

$$\vec{a} = (x_1, y_1) \quad \textit{и} \quad \vec{b} = (x_2, y_2)$$

вычисляется по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2. \tag{3.43}$$

Доказательство. Векторы $\vec{a} = (x_1, y_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2)$ разложим по ортам $\vec{i}$ и $\vec{j}$:

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}.$$

Теперь заметим, что свойства дистрибутивности (3.32) и однородности (3.33) скалярного произведения позволяют вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j})$ по правилу умножения многочленов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) =$$

$$= x_1x_2(\vec{i} \cdot \vec{i}) + x_1y_2(\vec{i} \cdot \vec{j}) + y_1x_2(\vec{j} \cdot \vec{i}) + y_1y_2(\vec{j} \cdot \vec{j}) = x_1x_2 + y_1y_2,$$

где были учтены равенства (3.41) и (3.42).

Теорема доказана. □

Формула (3.43) очень важна и имеет многочисленные применения. В частности, она позволяет определить длину вектора $\vec{a} = (x_1, y_1)$ и угол между векторами $\vec{a} = (x_1, y_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2)$ по координатам этих векторов. Для этого достаточно в формулах (3.37) и (3.38) поставить значения скалярных произведений, вычисленных по формуле (3.43). Итак, для *длины вектора* получим формулу

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \tag{3.44}$$

которая иным способом была получена ранее (см. (3.18)), а для *угла между двумя векторами*

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \tag{3.45}$$

Формула (3.43) позволяет также *условие взаимной перпендикулярности* (3.40) двух векторов $\vec{a} = (x_1, y_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2)$ переписать в виде

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0. \tag{3.46}$$

В пространстве для векторов

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{и} \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

совершенно так же получаем формулы

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2, \tag{3.47}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \tag{3.48}$$

$$\cos\varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}, \tag{3.49}$$

а также условие взаимной перпендикулярности двух векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \tag{3.50}$$

§ 3.15. Векторное произведение двух векторов. Основные свойства

Говорят, что три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют *правую тройку* (*левую тройку*) или *положительно ориентированы* (*отрицательно ориентированы*), если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден против часовой стрелки (по часовой стрелке) (рис. 3.47).

а) правая тройка *б*) левая тройка

Рис. 3.47

Замечание 3.8. *Ориентация тройки векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не меняется при циклической перестановке этих векторов*, т. е. если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ положительно ориентированы (отрицательно ориентированы), то тройки векторов $\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ также положительно ориентированы (отрицательно ориентированы).

Определение 3.5. *Векторным произведением* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:

1) длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла φ между ними:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi; \tag{3.51}$$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку (рис. 3.48).

Векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Согласно условию 1 последнего определения

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi. \tag{3.52}$$

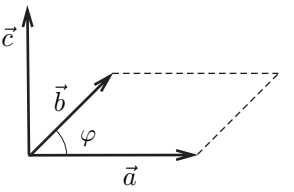


Рис. 3.48

Из формулы (3.52) следует, что $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$ тогда и только тогда, когда либо $\vec{a} = \vec{0}$, либо $\vec{b} = \vec{0}$, либо $\sin\varphi = 0$, т. е. когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Итак справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.16. *Векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.*

Из формулы (3.52) следует также

Теорема 3.17. *Длина вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ численно равна площади S параллелограмма, сторонами которого служат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:*

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|. \tag{3.53}$$

Непосредственно из определения векторного произведения 3.5 вытекает следующее *свойство антикоммутативности* векторного произведения.

Теорема 3.18. *Векторное произведение антикоммутативно, т. е.*

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}). \tag{3.54}$$

Доказательство. В самом деле, из условий 1) и 2) определения 3.5 следует, что векторные произведения $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{b} \times \vec{a}$ коллинеарны и имеют одинаковые длины. Осталось заметить, что они противоположно направлены. А это так, поскольку тройки векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{a}$ противоположно ориентированы (рис. 3.49).

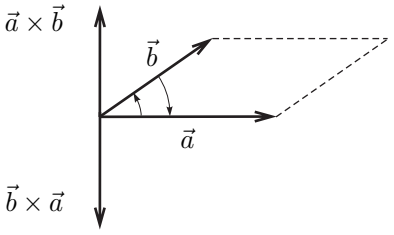


Рис. 3.49

Теорема доказана. □

Векторное произведение обладает *сочетательным* свойством.

Теорема 3.19. *Для произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и произвольного числа λ выполняется равенство*

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b}. \tag{3.55}$$

Доказательство. Если $\lambda = 0$, то утверждение теоремы очевидно.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарные, то векторы $\lambda\vec{a}$ и $\vec{b}$ тоже коллинеарные, и поэтому равенство (3.55) справедливо, поскольку обе его части равны нулю.

Итак, пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $\lambda > 0$. Тогда углы, образованные векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и векторами $\lambda\vec{a}$ и $\vec{b}$, равны (рис. 3.50). Следовательно,

$$|(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\varphi = |\lambda|\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\varphi = \\ = |\lambda|\,|\vec{a} \times \vec{b}| = |\lambda(\vec{a} \times \vec{b})|.$$

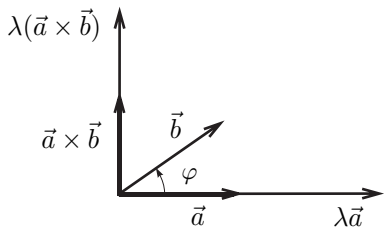


Рис. 3.50

Наконец заметим, что оба вектора, $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ и $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$, перпендикулярны плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направлены одинаково (рис. 3.50), а значит, они равны.

Случай 2. Пусть $\lambda < 0$. Тогда угол, образованный векторами

$\lambda\vec{a}$ и $\vec{b}$, равен $\pi - \varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 3.51). Следовательно,

$$|(\lambda\vec{a})\times\vec{b}| = |\lambda\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin(\pi-\varphi) = |\lambda|\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\varphi =$$
$$= |\lambda|\,|\vec{a}\times\vec{b}| = |\lambda(\vec{a}\times\vec{b})|.$$

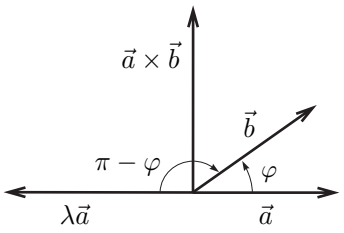


Рис. 3.51

Теперь заметим, что векторы $\vec{a}\times\vec{b}$ и $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ имеют противоположные направления, так как поворот от вектора $\vec{a}$ и от вектора $\lambda\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ происходят в противоположных направлениях (рис. 3.51). Но тогда векторы $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ и $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ одинаково направлены, поскольку $\lambda < 0$ по предположению.

Теорема доказана. □

Замечание 3.9. Из равенств (3.54) и (3.55) следует также равенство

$$\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}). \tag{3.56}$$

В самом деле,

$$\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = -\lambda(\vec{b}\times\vec{a}) = -[(\lambda\vec{b})\times\vec{a}] = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}).$$

Теорема 3.20. *Векторное произведение обладает свойством дистрибутивности, т. е.*

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}. \tag{3.57}$$

Эту теорему примем без доказательства.

§ 3.16. Выражение векторного произведения через прямоугольные координаты

Пусть $Oxyz$ — прямоугольная система координат в пространстве, а $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орты координатных осей этой системы (рис. 3.52).

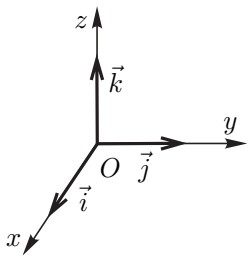


Рис. 3.52

Используя определение и свойства векторного произведения, легко проверить следующую таблицу умножения $\vec{a} \times \vec{b}$ для векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$\vec{a} \setminus \vec{b}$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

. (3.58)

Теорема 3.21. *Пусть* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. *Тогда*

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1). \tag{3.59}$$

Доказательство. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разложим по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k},$$
$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}.$$

Вычислим векторное произведение этих векторов, применяя свойства векторного произведения (см. теоремы 3.19 и 3.20) и таблицу векторного умножения (3.58):

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = \\
&= a_1b_1(\vec{i} \times \vec{i}) + a_1b_2(\vec{i} \times \vec{j}) + a_1b_3(\vec{i} \times \vec{k}) + \\
&\qquad + a_2b_1(\vec{j} \times \vec{i}) + a_2b_2(\vec{j} \times \vec{j}) + a_2b_3(\vec{j} \times \vec{k}) + \\
&\qquad + a_3b_1(\vec{k} \times \vec{i}) + a_3b_2(\vec{k} \times \vec{j}) + a_3b_3(\vec{k} \times \vec{k}) = \\
&= a_1b_2\vec{k} - a_1b_3\vec{j} - a_2b_1\vec{k} + a_2b_3\vec{i} + a_3b_1\vec{j} - a_3b_2\vec{i} = \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}.
\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. □

Запомнить формулу (3.59) довольно непросто. Чтобы облегчить эту задачу, векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ запишем в виде

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}, \tag{3.60}$$

или, еще короче:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{3.61}$$

§ 3.17. Смешанное произведение трех векторов

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные векторы пространства.

Определение 3.6. Число $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ называется *смешанным произведением* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и обозначается через $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Теорема 3.22. *Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.*

Доказательство. Утверждение теоремы очевидно в случае, когда один из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ нулевой.

Рассмотрим ненулевые векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Пусть $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$. Это значит, что вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{c}$ (см. теорему 3.14). Но поскольку вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярен плоскости, определенной векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то значит вектор $\vec{c}$ принадлежит (параллелен) этой плоскости, т. е. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны (см. определение 3.3).

Предположим теперь, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Тогда $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, поскольку вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярен плоскости, определяемой векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а, значит, и вектору $\vec{c}$.

Теорема доказана. □

Следующая теорема показывает геометрический смысл смешанного произведения.

Теорема 3.23. *Смешанное произведение трех некомпланарных векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «+», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «−», если они образуют левую тройку.*

Доказательство. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные три некомпланарные векторы.

Построим параллелепипед, ребрами которого являются векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 3.53).

Учитывая формулу (3.29) и теорему 3.17, получим выражение

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \mathrm{pr}_{\vec{a}\times\vec{b}}\,\vec{c} = S \cdot \mathrm{pr}_{\vec{a}\times\vec{b}}\,\vec{c}, \qquad (3.62)$$

где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а $\mathrm{pr}_{\vec{a}\times\vec{b}}\,\vec{c}$ — алгебраическое значение ортогональной проекции вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{a} \times \vec{b}$.

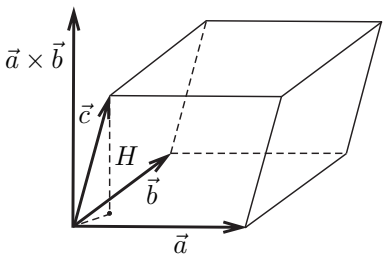


Рис. 3.53

Пусть H — высота параллелепипеда. Тогда $\mathrm{pr}_{\vec{a}\times\vec{b}}\,\vec{c} = H$, если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку, и $\mathrm{pr}_{\vec{a}\times\vec{b}}\,\vec{c} = -H$, если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют левую тройку.

Так как $S \cdot H = V$ — объем параллелепипеда, то из формулы (3.62) получим $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = V$ в случае правой тройки и $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -V$ в случае левой тройки векторов.

Теорема доказана. □

Замечание 3.10. *Смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ не меняется при циклической перестановке его сомножителей*:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}. \qquad (3.63)$$

Действительно, в этом случае не изменяется ни объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, ни ориентация его ребер (см. замечание 3.8).

Смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = -\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}. \qquad (3.64)$$

Действительно, в этом случае не изменяется объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, однако меняется ориентация его ребер.

Пользуясь равенствами (3.63), получим

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Итак,

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}), \qquad (3.65)$$

т. е. *смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножения*.

Это свойство и позволило смешанное произведение записывать в виде $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, пропуская знаки векторного и скалярного умножения.

Замечание 3.11. Из последней теоремы следует, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вычисляется по формуле

$$V = |\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,|. \qquad (3.66)$$

Нетрудно заметить, что объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 3.54), равен

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6}|\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,|. \qquad (3.67)$$

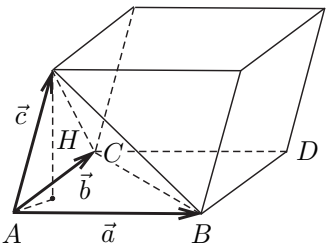


Рис. 3.54

В самом деле,

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}\,S_{\triangle ABC}\cdot H = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot S_{\triangle ABDC}\cdot H = \frac{1}{6}\,V = \frac{1}{6}\,|\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,|.$$

§ 3.18. Выражение смешанного произведения через прямоугольные координаты

Пусть $Oxyz$ — прямоугольная система координат в пространстве, а $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орты координатных осей этой системы.

Теорема 3.24. *Пусть* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. *Тогда*

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (3.68)$$

Доказательство. Вычислим смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, учитывая представление (3.60) векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)\cdot(c_1, c_2, c_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Что и требовалось доказать.

Из теорем 3.22 и 3.24 немедленно вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.3. *Векторы* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *и* $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ *компланарны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.69}$$

Пример 3.1. Найти объем пирамиды с вершинами $A(3,0,0)$, $B(1,3,0)$, $C(-2,-1,0)$ и $D(1,1,6)$.

Решение. Данная пирамида построена на векторах $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-2,3,0)$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (-5,-1,0)$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AD} = (-2,1,6)$.

Вычислим смешанное произведение этих векторов по формуле (3.68):

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 6 \cdot (2 + 15) = 102.$$

Из формулы (3.67) находим $V_{\text{пир.}} = \dfrac{1}{6} |\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,| = 17$.

Глава 4

ПРЯМЫЕ ЛИНИИ И ПЛОСКОСТИ

§ 4.1. Уравнения прямой на плоскости

Пусть на плоскости задана некоторая аффинная система координат.

Всякий ненулевой вектор, коллинеарный данной прямой, называется ее *направляющим вектором*.

На плоскости рассмотрим произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ и произвольный ненулевой вектор $\vec{a} = (a_1, a_2)$.

Заметим, что прямая l, которая проходит через точку M_0 и имеет направляющий вектор $\vec{a}$, есть геометрическое место всех точек $M(x, y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{a}, \tag{4.1}$$

где $t \in \mathbf{R}$ (рис. 4.1).

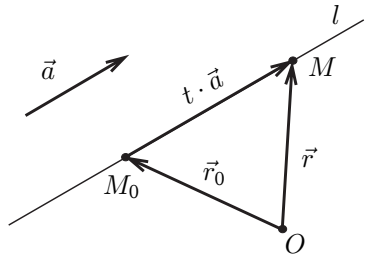


Рис. 4.1

Если радиус-векторы точек M_0 и M обозначить через $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$, соответственно, то уравнение (4.1) можно записать в виде

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{a}. \tag{4.2}$$

Уравнения (4.1) и (4.2) называются *векторно-параметрическими* уравнениями прямой, проходящей через точку M_0 и имеющей направляющий вектор $\vec{a}$.

В координатной записи уравнение (4.1) имеет вид

$$(x - x_0, y - y_0) = (ta_1, ta_2),$$

или

$$\begin{aligned} x - x_0 &= ta_1, \\ y - y_0 &= ta_2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Система уравнений (4.3) называется *параметрическим* уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{a} = (a_1, a_2)$.

Нетрудно заметить, что параметрическое уравнение (4.3) равносильно уравнению

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}, \tag{4.4}$$

которое называется *каноническим* уравнением прямой на плоскости.

Замечание 4.1. В каноническом уравнении (4.4) допускаются значения $a_1 = 0$ или $a_2 = 0$. Это не означает, что можно выполнить деление на 0. Просто из канонического уравнения получаем информацию о том, что направляющий вектор прямой имеет координаты, из которых одна — нулевая.

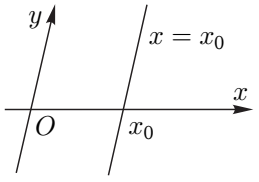


Рис. 4.2

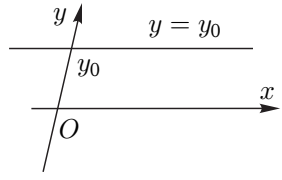


Рис. 4.3

Причем в случае $a_1 = 0$ уравнение прямой имеет вид $x - x_0 = 0$, или $x = x_0$ (рис. 4.2), а в случае $a_2 = 0$ — вид $y - y_0 = 0$, или $y = y_0$ (рис. 4.3).

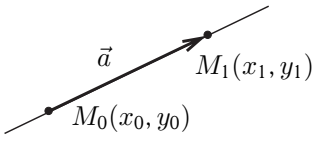


Рис. 4.4

Задача. Написать уравнение прямой, проходящей через две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$.

Решение. Заметим, что вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ является направляющим вектором указанной прямой (рис. 4.4).

Итак, прямая, проходящая через заданные две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ — это та же самая прямая, которая

проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеет направляющий вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Уравнение этой прямой, согласно формуле (4.4), имеет вид

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \tag{4.5}$$

(в случаях $x_1 - x_0 = 0$ или $y_1 - y_0 = 0$; см. замечание 4.1).

Уравнение (4.5) и есть *уравнение прямой, проходящей через две точки* $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$.

Теперь докажем следующую важную теорему.

Теорема 4.1. *Всякая прямая на плоскости задается уравнением первого порядка от двух переменных* x *и* y:

$$Ax + By + C = 0, \tag{4.6}$$

где A, B, *и* C *— постоянные числа*; *и обратно*: *любое уравнение вида* (4.6) *является уравнением некоторой прямой на плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную прямую на плоскости. Предположим, что эта прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеет направляющий вектор $\vec{a} = (a_1, a_2)$. Значит, эта прямая задается каноническим уравнением (4.4).

Далее, каноническое уравнение (4.4) равносильно уравнению $a_2(x - x_0) = a_1(y - y_0)$, или

$$a_2x - a_1y + a_1y_0 - a_2x_0 = 0, \tag{4.7}$$

что имеет вид (4.6), если обозначить

$$A = a_2, \quad B = -a_1 \quad \text{и} \quad C = a_1y_0 - a_2x_0. \tag{4.8}$$

Теперь предположим, что задано уравнение первого порядка (4.6) относительно x и y. Мы должны доказать, что оно является уравнением некоторой прямой на плоскости.

Так как по крайней мере один из коэффициентов A и B отличен от нуля (ибо в противном случае уравнение (4.6) не содержало бы членов первой степени), то, не теряя общности, предположим, что $A \neq 0$.

Теперь покажем, что (4.6) есть уравнение прямой, которая проходит через точку $M_0\,(-C/A, 0)$ и имеет направляющий вектор $\vec{a} = (-B, A)$.

В самом деле, каноническое уравнение указанной прямой имеет вид

$$\frac{x + \dfrac{C}{A}}{-B} = \frac{y - 0}{A},$$

откуда получаем уравнение $A\left(x+\dfrac{C}{A}\right)=-By$, или $Ax+By+$ $+C=0$.

Теорема доказана. □

Уравнение (4.6) называется *общим уравнением* прямой на плоскости.

Замечание 4.2. В доказательстве последней теоремы было установлено, что вектор

$$\vec{a}=(-B,A) \tag{4.9}$$

является направляющим вектором прямой, заданной общим уравнением (4.6) (см. обозначения (4.8)).

Пусть теперь в общем уравнении прямой (4.6) коэффициент B отличен от нуля: $B\neq 0$. Тогда это уравнение можно представить в виде $y=-\dfrac{A}{B}\,x-\dfrac{C}{B}$, или

$$y=kx+b, \tag{4.10}$$

где

$$k=-\frac{A}{B}, \tag{4.11}$$

а $b=-\dfrac{C}{B}$.

Число k называется *угловым коэффициентом* прямой, а уравнение (4.10) — *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Итак, мы показали, что любая прямая, *не параллельная оси* Oy ($B\neq 0$), может быть задана уравнением (4.10) с угловым коэффициентом.

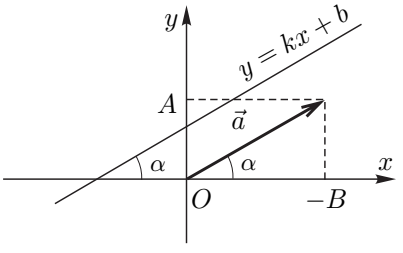


Рис. 4.5

Замечание 4.3. Угловой коэффициент k прямой определяется однозначно, поскольку он является отношением координат направляющего вектора $\vec{a}=(-B,A)$ данной прямой (см. (4.11)).

В случае прямоугольной системы координат угловой коэффициент k есть тангенс угла наклона прямой к оси Ox (рис. 4.5):

$$k=\operatorname{tg}\alpha. \tag{4.12}$$

§ 4.2. Неполные уравнения прямой. Уравнение прямой в отрезках

Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0 \tag{4.13}$$

называется *полным*, если все коэффициенты A, B и C отличны от нуля. Если хотя бы один из указанных коэффициентов равен нулю, то это уравнение называется *неполным*.

Рассмотрим всевозможные виды неполных уравнений прямой.

1. При $C = 0$ общее уравнение прямой (4.13) принимает вид

$$Ax + By = 0.$$

Этим уравнением определяется прямая, проходящая через начало координат $O(0, 0)$ (рис. 4.6).

2. При $B = 0$ общее уравнение прямой (4.13) принимает вид

$$Ax + C = 0,$$

или $x = -\dfrac{C}{A}$. Это есть уравнение прямой, параллельной оси Oy (рис. 4.7).

3. При $A = 0$ общее уравнение прямой (4.13) принимает вид

$$By + C = 0,$$

или $y = -\dfrac{C}{B}$. Это есть уравнение прямой, параллельной оси Ox (рис. 4.8).

4. При $B = 0$ и $C = 0$ общее уравнение прямой (4.13) принимает вид $Ax = 0$, или $x = 0$, что есть уравнение оси Oy.

5. При $A = 0$ и $C = 0$ общее уравнение прямой (4.13) принимает вид $By = 0$, или $y = 0$, что есть уравнение оси Ox.

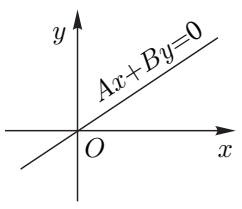


Рис. 4.6

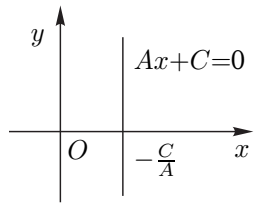


Рис. 4.7

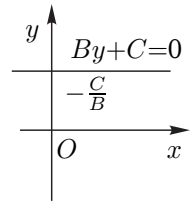


Рис. 4.8

Пусть теперь (4.13) — полное уравнение прямой.

Так как все коэффициенты общего уравнения (4.13) отличны

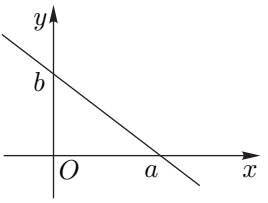


Рис. 4.9

от нуля: $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, то это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1,$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (4.14)$$

где $a = -\dfrac{C}{A}$, $\quad b = -\dfrac{C}{B}$.

Заметим, что прямая, заданная уравнением (4.14), проходит через точки $M_1(a, 0)$ и $M_2(0, b)$. Иначе говоря, числа a и b показывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат (рис. 4.9).

Уравнение (4.14) называется *уравнением прямой в отрезках*.

Замечание 4.4. В форме (4.14) может быть задано уравнение прямой, пересекающей обе координатные оси ($A \neq 0$, $B \neq 0$) и не проходящей через начало координат ($C \neq 0$), и только такой прямой.

§ 4.3. Нормальный вектор прямой

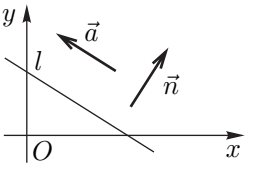


Рис. 4.10

Пусть на плоскости задана *прямоугольная система координат*.

Если вектор $\vec{n}$ перпендикулярен направляющему вектору $\vec{a}$ прямой l, то он называется *нормальным вектором* прямой l (рис. 4.10).

Теорема 4.2. *Пусть прямая задана общим уравнением*

$$Ax + By + C = 0. \qquad (4.15)$$

Тогда вектор

$$\vec{n} = (A, B) \qquad (4.16)$$

является нормальным вектором этой прямой.

Доказательство. Действительно, вектор $\vec{a} = (-B, A)$ является направляющим вектором прямой, заданной уравнением (4.15), и

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = (A, B) \cdot (-B, A) = -A \cdot B + A \cdot B = 0.$$

А это значит, что $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярен направляющему вектору $\vec{a} = (-B, A)$, т. е. является нормальным вектором данной прямой, что и требовалось доказать. □

Задача. Найти уравнение прямой l, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n} = (A, B)$.

Решение. Возьмем на прямой l произвольную точку $M(x, y)$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ (рис. 4.11).

Поскольку векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$, т. е.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (4.17)$$

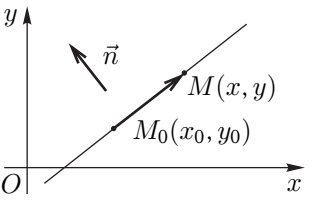


Рис. 4.11

Это и есть искомое уравнение, поскольку координаты любой точки прямой l удовлетворяют уравнению (4.17), а координаты точек, не лежащих на прямой l, этому уравнению не удовлетворяют (для них $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} \neq 0$).

Уравнение (4.17) называется *уравнением прямой, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0)$ *перпендикулярно вектору* $\vec{n} = (A, B)$.

Теперь заметим, что для произвольных коэффициентов A и B уравнение (4.17) задает прямую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Совокупность всех прямых, проходящих через данную точку $M_0(x_0, y_0)$, называется *пучком прямых* (с центром в M_0).

Уравнение (4.17), где A и B — любые числа, не равные одновременно нулю, является *уравнением пучка прямых с центром в точке* $M_0(x_0, y_0)$.

§ 4.4. Расстояние от точки до прямой

Теорема 4.3. *Расстояние* d *от точки* $M_0(x_0, y_0)$ *до прямой, заданной общим уравнением*

$$Ax + By + C = 0, \quad (4.18)$$

вычисляется формулой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (4.19)$$

Доказательство. Пусть l — прямая, заданная общим уравнением (4.18), и пусть $M'(x', y')$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(x_0, y_0)$ на прямую l. Тогда $d = |\overrightarrow{M'M_0}|$ (рис. 4.12).

Вектор $\overrightarrow{M'M_0} = (x_0 - x', y_0 - y')$ и нормальный вектор $\vec{n} = (A, B)$ прямой l коллинеарны, т. е. угол φ между ними равен 0 или π. Следовательно,

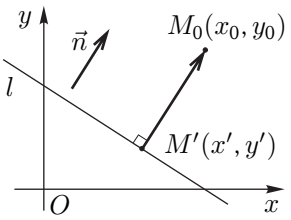


Рис. 4.12

$$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M'M_0}| = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{M'M_0}| \cdot |\cos\varphi| = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{M'M_0}| = |\vec{n}| \cdot d.$$

Отсюда

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M'M_0}|}{|\vec{n}|}. \qquad (4.20)$$

Теперь вычислим скалярное произведение $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M'M_0}$:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M'M_0} = A(x_0 - x') + B(y_0 - y') = Ax_0 + By_0 - (Ax' + By').$$

Так как точка $M'(x', y')$ принадлежит прямой l, то $Ax' + By' + C = 0$, т. е. $C = -(Ax' + By')$. Следовательно,

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M'M_0} = Ax_0 + By_0 + C.$$

Подставив полученное выражение в (4.20) и учитывая равенство $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$, получим требуемую формулу (4.19).

Теорема доказана. □

Пример 4.1. Найти расстояние от точки $M_0(1, 5)$ до прямой, заданной общим уравнением $3x - 4y - 3 = 0$.

Решение. По формуле (4.19) имеем $d = \dfrac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$.

§ 4.5. Нормальное уравнение прямой

Пусть l — произвольная прямая плоскости. Проведем через начало координат O прямую l', перпендикулярную l. Точку пересечения прямых l и l' обозначим буквой N. На прямой l' рассмотрим единичный вектор $\vec{n}$, направление которого совпадает

с направлением вектора $\overrightarrow{ON}$ (в случае совпадения точек O и N это направление выбирается произвольно). Угол, составленный единичным вектором $\vec{n}$ с осью Ox, обозначим через α, а длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую l, — через p: $p = |\overrightarrow{ON}|$ (рис. 4.13).

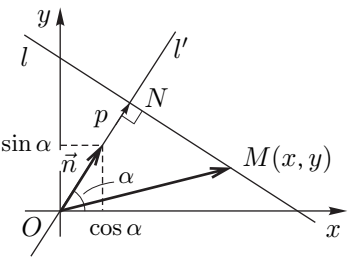


Рис. 4.13

Наша задача — выразить уравнение прямой l через два параметра: p и α.

Так как $\vec{n}$ — единичный вектор, то его координаты имеют вид

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \sin\alpha). \tag{4.21}$$

Теперь заметим, что *точка $M(x, y)$ принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда проекция вектора $\overrightarrow{OM}$ на ось, определяемую вектором $\vec{n}$, равна p*:

$$\mathrm{pr}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{OM} = p. \tag{4.22}$$

Согласно формуле (3.29) скалярного произведения, имеем

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = |\vec{n}| \cdot \mathrm{pr}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{OM} = \mathrm{pr}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{OM}. \tag{4.23}$$

И, поскольку

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = (\cos\alpha, \sin\alpha) \cdot (x, y) = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$

то уравнение (4.22) окончательно принимает вид $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, или

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{4.24}$$

Это уравнение и называется *нормальным уравнением* прямой.

Теперь предположим, что рассматриваемая прямая l была задана общим уравнением

$$Ax + By + C = 0. \tag{4.25}$$

Так как уравнения (4.24) и (4.25) являются уравнениями одной и той же прямой l, то существует такое число λ, что

$$\begin{cases} \lambda A = \cos\alpha, \\ \lambda B = \sin\alpha, \\ \lambda C = -p. \end{cases} \tag{4.26}$$

Из первых двух уравнений системы (4.26) получаем $\lambda^2(A^2 + B^2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, откуда

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{4.27}$$

Из третьего же уравнения системы (4.26) следует, что множитель λ и число C имеют противоположные знаки.

Число λ, модуль которого есть $\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, а знак противоположен знаку C, называется *нормирующим множителем* уравнения (4.25) (при $C = 0$ знак λ можно выбрать произвольно).

Итак, для того, чтобы привести общее уравнение прямой (4.25) к нормальному виду (4.24), следует умножить его на нормирующий множитель λ.

Пример 4.2. Привести общее уравнение прямой $3x - 4y - 10 = 0$ к нормальному виду.

Решение. Для уравнения $3x - 4y - 10 = 0$ находим нормирующий множитель $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{1}{5}$.

Умножая данное уравнение на $\dfrac{1}{5}$, получим искомое нормальное уравнение прямой: $\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y - 2 = 0$.

Замечание 4.5. Если прямая задана нормальным уравнением (4.24), то расстояния d от произвольной точки $M_0(x_0, y_0)$ до этой прямой вычисляется формулой

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|, \tag{4.28}$$

что следует из формулы (4.19).

§ 4.6. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть l_1 и l_2 — две произвольные прямые на плоскости.

Углом между двумя прямыми l_1 и l_2 на плоскости называется угол между их направляющими векторами.

Очевидно, что это определение дает не один, а два угла, дополняющих друг друга до π (рис. 4.14).

Теперь предположим, что прямые l_1 и l_2 соответственно заданы их общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad (4.29)$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \qquad (4.30)$$

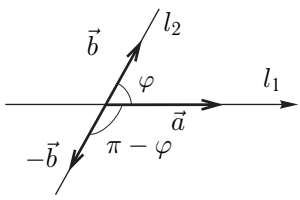


Рис. 4.14

Так как векторы

$$\vec{a}_1 = (-B_1, A_1) \quad \text{и} \quad \vec{a}_2 = (-B_2, A_2)$$

являются направляющими векторами прямых l_1 и l_2, то косинус угла φ между этими прямыми вычисляется формулой

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (4.31)$$

Это следует из определения угла между двумя прямыми и формулы (3.45).

Заметим, что, если $A_1A_2 + B_1B_2 > 0$, то по формуле (4.31) получаем острый угол между прямыми l_1 и l_2, а если $A_1A_2 + B_1B_2 < 0$, то — тупой угол.

Равенство

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \qquad (4.32)$$

выражает *условие перпендикулярности прямых* l_1 и l_2, поскольку в этом случае $\cos\varphi = 0$ согласно формуле (4.31).

Условие перпендикулярности (4.32) прямых l_1 и l_2 может быть получено также из условия ортогональности нормальных векторов $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ этих прямых: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Условие параллельности прямых l_1 и l_2, эквивалентное условию коллинеарности их направляющих векторов $\vec{a}_1 = (-B_1, A_1)$ и $\vec{a}_2 = (-B_2, A_2)$ (нормальных векторов $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$), заключается в пропорциональности координат этих векторов:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \qquad (4.33)$$

Пусть теперь прямые l_1 и l_2 заданы своими уравнениями с угловым коэффициентом:

$$y = k_1x + b_1 \qquad (4.34)$$

и

$$y = k_2x + b_2. \qquad (4.35)$$

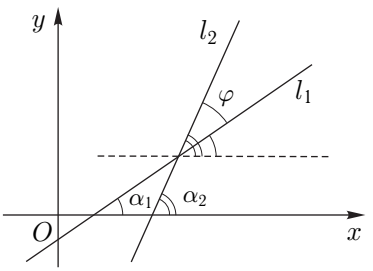


Рис. 4.15

Углы наклона прямых l_1 и l_2 к оси Ox обозначим через α_1 и α_2 соответственно. Тогда $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$ и $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$.

Из элементарных соображений (рис. 4.15) вытекает, что угол φ между прямыми l_1 и l_2 равен

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1. \tag{4.36}$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Итак, угол φ между двумя прямыми, заданными уравнениями (4.34) и (4.35), определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{4.37}$$

Теперь заметим, что *две прямые параллельны тогда и только тогда, когда тангенс угла между ними равен нулю*: $\operatorname{tg}\varphi = 0$, т. е. когда выполняется равенство

$$k_1 = k_2. \tag{4.38}$$

Прямые l_1 и l_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, а, значит, котангенс угла между ними равен нулю:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0.$$

Откуда получаем следующее *условие перпендикулярности прямых*:

$$k_1 \cdot k_2 = -1. \tag{4.39}$$

§ 4.7. Уравнения плоскости в пространстве

Пусть в пространстве задана некоторая прямоугольная система координат $Oxyz$.

Всякую плоскость Π в пространстве можно задать, указав какую-нибудь ее точку и два произвольных приложенных к этой точке неколлинеарных вектора (рис. 4.16).

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка, а $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ — исходящие из этой точки произвольные неколлинеарные векторы плоскости П (рис. 4.16).

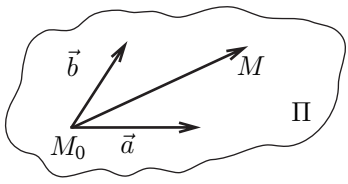


Рис. 4.16

В силу теоремы 3.4 для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на плоскости П, выполняется равенство

$$\overrightarrow{M_0M} = s\vec{a} + t\vec{b}, \tag{4.40}$$

где s и t — некоторые действительные числа, и, наоборот, любая точка $M(x, y, z)$ пространства, для которой выполняется равенство (4.40) при некоторых числах s и t, принадлежит плоскости П.

Итак, *геометрическое место всех точек* $M(x, y, z)$, *удовлетворяющих уравнению* (4.40), *есть плоскость*, *проходящая через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *и два приложенных к ней неколлинеарных вектора* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *и* $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Уравнение (4.40) называется *векторно-параметрическим уравнением плоскости*, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два неколлинеарных вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

В координатной форме уравнение (4.40) примет вид

$$\begin{aligned} x - x_0 &= sa_1 + tb_1, \\ y - y_0 &= sa_2 + tb_2, \\ z - z_0 &= sa_3 + tb_3. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Уравнение (4.41) называется *параметрическим уравнением плоскости*.

Уравнение (4.41), в свою очередь, эквивалентно уравнению

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.42}$$

Задача. Найти уравнение плоскости, проходящей через не лежащие на одной прямой три точки:

$$M_0(x_0, y_0, z_0), \quad M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2).$$

Р е ш е н и е. Нетрудно заметить, что искомая плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и неколлинеарные векторы

$\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ и $\overrightarrow{M_0M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$ (рис. 4.17).

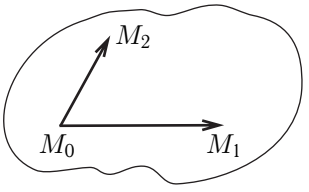


Рис. 4.17

Значит, ее уравнение (4.42) имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.43}$$

Теперь докажем следующую важную теорему.

Теорема 4.4. *Всякая плоскость в пространстве задается уравнением первого порядка от трех переменных x, y и z:*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{4.44}$$

где A, B, C и D — постоянные числа; и обратно: любое уравнение вида (4.44) *является уравнением некоторой плоскости в пространстве.*

Доказательство. Пусть Π — произвольная плоскость в пространстве. Предположим, что эта плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два неколлинеарных вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Уравнение этой плоскости, как было установлено выше, имеет вид (4.42).

Если определитель левой части уравнения (4.42) разложить по первой строке, то это уравнение примет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{4.45}$$

где

$$A = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{4.46}$$

Осталось заметить, что уравнение (4.45) можно переписать в виде (4.44), если обозначить $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Пусть теперь задано уравнение первого порядка (4.44) относительно переменных x, y и z. Мы должны доказать, что оно является уравнением некоторой плоскости в пространстве.

Так как по крайней мере один из коэффициентов A, B и C отличен от нуля (ибо в противном случае уравнение (4.44) не содержало бы членов первой степени), то предположим, что $A \neq 0$.

Теперь покажем, что (4.44) есть уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(-D/A, 0, 0,)$ и два неколлинеарных вектора $\vec{a} = (-B, A, 0)$ и $\vec{b} = (-C, 0, A)$.

В самом деле, уравнение этой плоскости (см. (4.42)) имеет вид

$$\begin{vmatrix} x + \dfrac{D}{A} & y & z \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix} \cdot \left(x + \frac{D}{A}\right) - \begin{vmatrix} -B & 0 \\ -C & A \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} -B & A \\ -C & 0 \end{vmatrix} \cdot z = 0,$$

то есть

$$A^2 \left(x + \frac{D}{A}\right) + A \cdot By + A \cdot Cz = 0.$$

Сокращая на $A \neq 0$, окончательно получим уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$.

Теорема доказана. □

Уравнение (4.44) называется *общим уравнением плоскости*.

Замечание 4.6. В доказательстве последней теоремы было установлено, что при $A \neq 0$ уравнением (4.44) определяется плоскость, проходящая через точку $M_0(-D/A, 0, 0,)$ и два неколлинеарных вектора $\vec{a} = (-B, A, 0)$ и $\vec{b} = (-C, 0, A)$.

§ 4.8. Нормальный вектор плоскости

Вектор $\vec{n}$, перпендикулярный плоскости Π, называется ее *нормальным вектором* (рис. 4.18).

Теорема 4.5. Пусть плоскость задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (4.47)$$

Тогда вектор

$$\vec{n} = (A, B, C) \qquad (4.48)$$

является нормальным вектором этой плоскости.

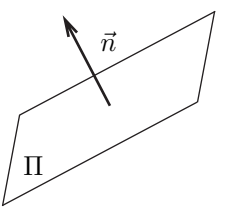


Рис. 4.18

Доказательство. Не теряя общности, предположим, что в общем уравнении (4.47) коэффициент A отличен от нуля: $A \neq 0$. Тогда уравнением (4.47) определяется плоскость, проходящая через точку $M_0\,(-D/A, 0, 0,)$ и два неколлинеарных вектора $\vec{a} = (-B, A, 0)$ и $\vec{b} = (-C, 0, A)$ (см. замечание 4.6).

Теперь заметим, что

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = (A, B, C) \cdot (-B, A, 0) = -A \cdot B + A \cdot B + C \cdot 0 = 0$$

и

$$\vec{n} \cdot \vec{b} = (A, B, C) \cdot (-C, 0, A) = -A \cdot C + B \cdot 0 + A \cdot C = 0.$$

Из этих равенств следует, что вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ перпендикулярен векторам $\vec{a} = (-B, A, 0)$ и $\vec{b} = (-C, 0, A)$, т. е. является нормальным вектором данной плоскости (рис. 4.19).

Теорема доказана. □

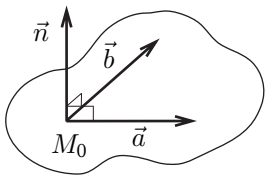


Рис. 4.19

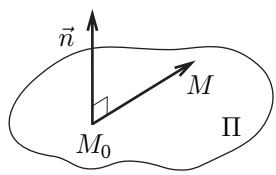


Рис. 4.20

Задача. Найти уравнение плоскости П, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n} = (A, B, C)$.

Решение. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости П. По условию задачи векторы $\vec{n} = (A, B, C)$ и $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ перпендикулярны (рис. 4.20), поэтому их скалярное произведение равно нулю: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$, т. е.

$$A(x - x_0) + B(y - y_o) + C(z - z_0) = 0. \qquad (4.49)$$

Это и есть искомое уравнение, поскольку координаты любой точки плоскости П удовлетворяют уравнению (4.49), а координаты точек, не лежащих на плоскости П, этому уравнению не удовлетворяют (для них $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} \neq 0$).

Уравнение (4.49) называется *уравнением плоскости, проходящей через данную точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\vec{n} = (A, B, C)$.

Теперь заметим, что для произвольных коэффициентов A, B и C уравнение (4.49) задает плоскость, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Совокупность всех плоскостей, проходящих через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, называется *связкой плоскостей* (с центром в M_0).

Уравнение (4.49), где A, B и C любые числа, не равные одновременно нулю, является *уравнением связки плоскостей с центром в точке* $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Пример 4.3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1, 1, -1)$ и параллельной векторам $\vec{a} = (1, 2, 0)$ и $\vec{b} = (1, -1, 2)$.

Решение. Так как векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонально векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то, следовательно, оно ортогонально искомой плоскости.

Итак, вектор $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ можно взять в качестве нормального вектора искомой плоскости.

Найдем координаты вектора $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k},$$

т. е. $\vec{n} = (4, -2, -3)$.

По формуле (4.49) получим искомое уравнение $4(x - 1) - 2(y - 1) - 3(z + 1) = 0$, или $4x - 2y - 3z - 5 = 0$.

§ 4.9. Неполные уравнения плоскости. Уравнение плоскости в отрезках

Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{4.50}$$

называется *полным*, если все коэффициенты A, B, C и D отличны от нуля. Если хотя бы один из указанных коэффициентов равен нулю, то это уравнение называется *неполным*.

Рассмотрим некоторые виды неполных уравнений плоскости.

1. При $D = 0$ общее уравнение плоскости (4.50) принимает вид

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Этим уравнением определяется плоскость, проходящая через начало координат $O(0, 0, 0)$.

2. При $C = 0$ общее уравнение плоскости (4.50) принимает вид

$$Ax + By + D = 0.$$

Этим уравнением определяется плоскость, параллельная оси Oz, поскольку этой оси перпендикулярен нормальный вектор данной плоскости $\vec{n} = (A, B, 0)$.

3. При $B = 0$ общее уравнение плоскости (4.50) принимает вид

$$Ax + Cz + D = 0.$$

Этим уравнением определяется плоскость, параллельная оси Oy, поскольку этой оси перпендикулярен нормальный вектор данной плоскости $\vec{n} = (A, 0, C)$.

4. При $A = 0$ общее уравнение плоскости (4.50) принимает вид

$$By + Cz + D = 0.$$

Этим уравнением определяется плоскость, параллельная оси Ox, поскольку этой оси перпендикулярен нормальный вектор данной плоскости $\vec{n} = (0, B, C)$.

5. При $A = 0$ и $B = 0$ общее уравнение плоскости (4.50) принимает вид

$$Cz + D = 0.$$

Этим уравнением определяется плоскость, параллельная координатной плоскости Oxy, поскольку данная плоскость параллельна осям Ox и Oy.

6. При $A = 0$ и $C = 0$ общее уравнение плоскости (4.50) принимает вид

$$By + D = 0.$$

Этим уравнением определяется плоскость, параллельная координатной плоскости Oxz, поскольку данная плоскость параллельна осям Ox и Oz.

7. При $B = 0$ и $C = 0$ общее уравнение плоскости (4.50) принимает вид

$$Ax + D = 0.$$

Этим уравнением определяется плоскость, параллельная координатной плоскости Oyz, поскольку данная плоскость параллельна осям Oy и Oz.

Пусть теперь (4.50) — полное уравнение плоскости.

Так как все коэффициенты общего уравнения (4.50) отличны от нуля: $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, то это уравнение можно переписать в виде $\dfrac{x}{-DA} + \dfrac{y}{-\dfrac{D}{B}} + \dfrac{z}{-\dfrac{D}{C}} = 1$, или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{4.51}$$

где $a = -\dfrac{D}{A}$, $b = -\dfrac{D}{B}$, $c = -\dfrac{D}{C}$.

Заметим, что плоскость, заданная уравнением (4.51), проходит через точки $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$ и $M_3(0, 0, c)$. Иначе говоря, числа a, b и c показывают, какие отрезки отсекает плоскость на осях координат (рис. 4.21).

Уравнение (4.51) называется *уравнением плоскости в отрезках*.

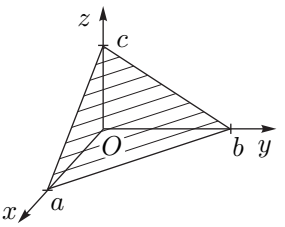


Рис. 4.21

Замечание 4.7. В форме (4.51) может быть задано уравнение плоскости, пересекающей все координатные оси ($A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$) и не проходящей через начало координат ($D \neq 0$), и только такой плоскости.

§ 4.10. Расстояние от точки до плоскости

Теорема 4.6. *Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной общим уравнением*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{4.52}$$

вычисляется формулой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{4.53}$$

Доказательство. Пусть Π — плоскость, заданная общим уравнением (4.52), и пусть $M'(x', y', z')$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на плоскость Π. Тогда $d = |\overrightarrow{M'M_0}|$ (рис. 4.22).

Вектор $\overrightarrow{M'M_0} = (x_0 - x', y_0 - y', z_0 - z')$ и нормальный вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ плоскости Π коллинеарны, т. е. угол φ между ними равен 0 или π. Следовательно,

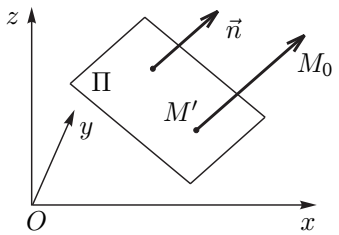


Рис. 4.22

$$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M'M_0}| = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{M'M_0}| \cdot |\cos\varphi| =$$

$$= |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{M'M_0}| = |\vec{n}| \cdot d,$$

откуда

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M'M_0}|}{|\vec{n}|}. \qquad (4.54)$$

Теперь вычислим скалярное произведение $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M'M_0}$:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M'M_0} = A(x_0 - x') + B(y_0 - y') + C(z_0 - z') =$$

$$= Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax' + By' + Cz').$$

Так как точка $M'(x', y', z')$ принадлежит плоскости Π, то $Ax' + By' + Cz' + D = 0$, т. е. $D = -(Ax' + By' + Cz')$. Следовательно,

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M'M_0} = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D.$$

Подставив полученное выражение в (4.54) и учитывая равенство $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, получим требуемую формулу (4.53).

Теорема доказана. □

Пример 4.4. Найти расстояние от точки $M_0(1, 5, 3)$ до плоскости, заданной общим уравнением $3x + 2y - \sqrt{3}\,z - 3 = 0$.

Решение. По формуле (4.53) имеем

$$d = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 - 3 \cdot \sqrt{3} - 3|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{10 - 3\sqrt{3}}{4}.$$

§ 4.11. Нормальное уравнение плоскости

Пусть Π — произвольная плоскость пространства. Проведем через начало координат O прямую l, перпендикулярную плоскости Π. Точку пересечения прямой l и плоскости Π обозначим буквой N (рис. 4.23). На прямой l рассмотрим единичный вектор $\vec{n}$, направление которого совпадает с направлением вектора $\overrightarrow{ON}$

(в случае совпадения точек O и N это направление выбирается произвольно).

Углы, составленные единичным вектором $\vec{n}$ с осями Ox, Oy и Oz, обозначим соответственно через α, β и γ. Так как вектор $\vec{n}$ — единичный, то координаты этого вектора равны его проекциям на оси координат и, следовательно, имеют вид

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \tag{4.55}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы единичного вектора $\vec{n}$ (см. § 3.12).

Длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость Π, обозначим через p: $p = |\overrightarrow{ON}|$.

Наша задача — выразить уравнение плоскости Π через расстояние p от начала координат до этой плоскости и направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ единичного вектора $\vec{n}$.

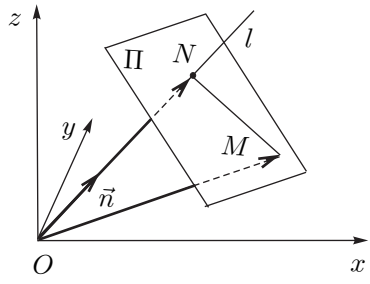


Рис. 4.23

Заметим, что *точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости Π тогда и только тогда, когда проекция вектора $\overrightarrow{OM}$ на ось, определяемую вектором $\vec{n}$, равна p*:

$$\mathrm{pr}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{OM} = p. \tag{4.56}$$

Согласно формуле скалярного произведения (3.29) имеем

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OM} = |\vec{n}|\cdot\mathrm{pr}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{OM} = \mathrm{pr}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{OM} \tag{4.57}$$

и, поскольку

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OM} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\cdot(x, y, z) = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma,$$

то равенство (4.56) окончательно принимает вид $x\cos\alpha + {}$ $+ y\sin\alpha + z\cos\gamma = p$, или

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha + z\cos\gamma - p = 0. \tag{4.58}$$

Это уравнение и называется *нормальным уравнением* плоскости.

Теперь предположим, что рассматриваемая плоскость Π была задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{4.59}$$

Так как уравнения (4.58) и (4.59) являются уравнениями

одной и той же плоскости Π, то существует такое число λ, что

$$\begin{aligned} \lambda A &= \cos\alpha, \\ \lambda B &= \cos\beta, \\ \lambda C &= \cos\gamma, \\ \lambda D &= -p. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Из первых трех уравнений системы (4.60) получаем $\lambda^2(A^2 + B^2 + C^2) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (см. (3.24)), откуда

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{4.61}$$

Из четвертого же уравнения системы (4.60) следует, что множитель λ и число D имеют противоположные знаки.

Число λ, модуль которого есть $\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, а знак противоположен знаку D, называется *нормирующим множителем* уравнения (4.59) (при $D = 0$ знак λ можно выбрать произвольно).

Итак, *для того, чтобы привести общее уравнение плоскости* (4.59) *к нормальному виду* (4.58) *следует умножить его на нормирующий множитель* λ.

Замечание 4.8. Если плоскость задана нормальным уравнением (4.58), то расстояния d от произвольной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до этой плоскости вычисляется формулой

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|, \tag{4.62}$$

что следует из формулы (4.53) и равенства $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

§ 4.12. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Пусть Π_1 и Π_2 — две произвольные плоскости пространства, соответственно заданные общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \tag{4.63}$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{4.64}$$

Углом между двумя плоскостями Π_1 и Π_2 называется угол φ между их нормальными векторами

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \quad \text{и} \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2).$$

Это определение дает не один, а два угла (острый и тупой), дополняющих друг друга до π (рис. 4.24).

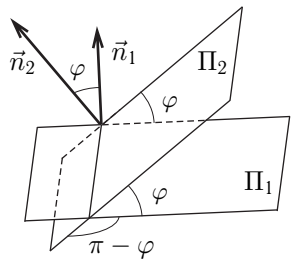


Рис. 4.24

Итак, угол между двумя плоскостями определяется формулой (см. 3.49)

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{4.65}$$

Заметим, что, если $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 > 0$, то по формуле (4.65) получаем острый угол между плоскостями Π_1 и Π_2, а если $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 < 0$, то — тупой угол.

Условие параллельности плоскостей Π_1 и Π_2, эквивалентное условию коллинеарности их нормальных векторов $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, заключается в пропорциональности координат этих векторов (см. 3.8):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{4.66}$$

Равенство

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \tag{4.67}$$

выражает *условие перпендикулярности плоскостей* Π_1 и Π_2, поскольку в этом случае $\cos\varphi = 0$ согласно формуле (4.65).

Условие перпендикулярности (4.67) плоскостей Π_1 и Π_2 может быть получено также из условия ортогональности нормальных векторов $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ этих плоскостей: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

§ 4.13. Уравнения прямой в пространстве

В пространстве рассмотрим произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и произвольный ненулевой вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Как и в случае плоскости (см. § 4.1), прямая l, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеет направляющий вектор

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, есть геометрическое место всех точек $M(x, y, z)$, удовлетворяющих уравнению

$$\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{a}, \tag{4.68}$$

где t пробегает все действительные числовые значения (рис. 4.25).

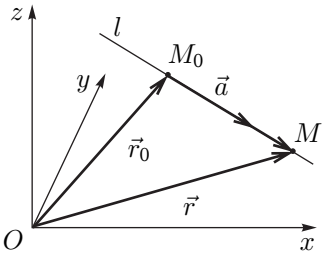


Рис. 4.25

Если радиус-векторы точек M_0 и M обозначить через $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ соответственно, то уравнение (4.68) можно записать в виде

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{a}. \tag{4.69}$$

Уравнения (4.68) и (4.69) называются *векторно-параметрическими* уравнениями прямой, проходящей через точку M_0 и имеющей направляющий вектор $\vec{a}$.

В координатной записи уравнение (4.68) имеет вид

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta_1, ta_2, ta_3),$$

или

$$\begin{cases} x - x_0 = t\,a_1, \\ y - y_0 = t\,a_2, \\ z - z_0 = t\,a_3. \end{cases} \tag{4.70}$$

Система уравнений (4.70) называется *параметрическим* уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Нетрудно заметить, что параметрическое уравнение (4.70) равносильно уравнению

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}, \tag{4.71}$$

которое называется *каноническим* уравнением прямой в пространстве.

Замечание 4.9. В каноническом уравнении (4.71) о дно или два из чисел a_1, a_2 и a_3 могут оказаться равными нулю. Это не означает, что можно выполнить деление на 0.

Обращение в нуль одного из знаменателей канонического уравнения (4.71) *означает обращение в нуль и соответствующего числителя* (см. (4.70)).

Замечание 4.10. Каноническое уравнение прямой (4.71) эквивалентно следующей системе из двух уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{x-x_0}{a_1} &= \frac{y-y_0}{a_2}, \\ \frac{x-x_0}{a_1} &= \frac{z-z_0}{a_3}. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Каждое из уравнений этой системы, будучи уравнением первой степени относительно переменных x, y и z, задает плоскость в пространстве. Следовательно, системой (4.72) прямая определяется как пересечение двух плоскостей пространства.

Задача. Написать уравнение прямой, проходящей через две точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

Решение. Заметим, что вектор

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

является направляющим вектором указанной прямой (рис. 4.26).

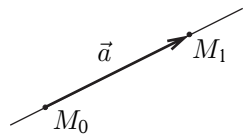


Рис. 4.26

Значит прямая, проходящая через заданные две точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — это та же самая прямая, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеет направляющий вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$.

Уравнение этой прямой, согласно формуле (4.71), имеет вид

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \tag{4.73}$$

Уравнение (4.73) и есть *уравнение прямой, проходящей через две точки* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

§ 4.14. Общее уравнение прямой в пространстве

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух не параллельных плоскостей.

Пусть Π_1 и Π_2 — две не параллельные плоскости, заданные общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \tag{4.74}$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{4.75}$$

Тогда система уравнений

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.76}$$

задает некоторую прямую в пространстве.

Система уравнений (4.76) называется *общим уравнением прямой в пространстве*.

Каноническое уравнение прямой в пространстве (4.71), как было указано в замечании 4.10, без особого труда сводится к общему уравнению.

Теперь решим обратную задачу. Пусть прямая в пространстве задана общим уравнением (4.76). Требуется написать каноническое уравнение этой прямой.

Для этого достаточно найти:

1) какую нибудь точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую проходит прямая (4.76);
2) направляющий вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ этой прямой.

Так как плоскости (4.74) и (4.75) — не параллельны, то нарушается хотя бы одна из пропорций

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Тогда по крайней мере один из трех определителей

$$a_1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad a_2 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad a_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \tag{4.77}$$

отличен от нуля, и, следовательно, система уравнений (4.76) совместна. Пусть x_0, y_0, z_0 — произвольное решение этой системы. Это значит, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит обеим плоскостям (4.74) и (4.75), т. е. прямой, заданной общим уравнением (4.76).

Для нахождения направляющего вектора $\vec{a}$ прямой, заданной общим уравнением (4.76), заметим, что вектор $\vec{a}$ ортогонален каждому из нормальных векторов $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ плоскостей (4.74) и (4.75) соответственно. Следовательно, можно положить

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2.$$

Значит, координаты вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ определяются равенствами (4.77) (см. формулу выражения векторного произведения через прямоугольные координаты (3.60)).

Итак, зная точку и направляющий вектор, можно написать каноническое уравнения прямой (4.71).

Изложенный выше метод сведения общего уравнения прямой (4.76) к каноническому уравнению продемонстрируем на конкретном примере.

Пример 4.5. Написать каноническое уравнение прямой, заданной общим уравнением:

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z - 1 &= 0, \\ 2x + \ y - \ z - 2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Решение. Найдем какую-нибудь точку прямой (4.78). Положим $z = 0$. Тогда система (4.78) примет вид

$$\begin{aligned} x - 3y &= 1, \\ 2x + \ y &= 2. \end{aligned}$$

Решая ее, находим $x = 1$, $y = 0$. Таким образом, точка $M_0(1, 0, 0)$ лежит на прямой (4.78).

Поскольку $\vec{n}_1 = (1, -3, 2)$ и $\vec{n}_2 = (2, 1, -1)$ являются нормальными векторами плоскостей, соответствующих уравнениям системы (4.78), то вектор

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}$$

будет направляющим вектором прямой, заданной общим уравнением (4.78).

Теперь, зная точку и направляющий вектор, напишем каноническое уравнения прямой (см. (4.71)): $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{7}$.

§ 4.15. Угол между прямыми в пространстве. Условие параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть l_1 и l_2 — две произвольные прямые в пространстве, заданные своими каноническими уравнениями:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \tag{4.79}$$

и

$$\frac{x - x_1}{b_1} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{b_3}. \tag{4.80}$$

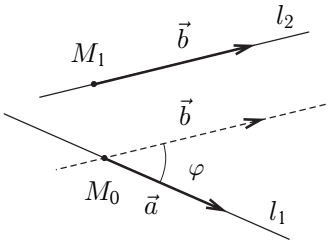


Рис. 4.27

Углом между прямыми l_1 и l_2 в пространстве называется угол φ между их направляющими векторами $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ (рис. 4.27).

В силу формулы вычисления косинуса угла между векторами (3.49), для определения угла φ между прямыми l_1 и l_2 в пространстве получим

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \tag{4.81}$$

Заметим, что, если $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 > 0$, то по формуле (4.81) получаем острый угол между прямыми l_1 и l_2, а если $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 < 0$, — тупой угол.

Если прямые l_1 и l_2 перпендикулярны, то в этом, и только в этом, случае $\cos\varphi = 0$. Следовательно, принимая во внимание формулу (4.81), *условие перпендикулярности прямых* l_1 и l_2 в пространстве выражается равенством

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0. \tag{4.82}$$

Условие перпендикулярности (4.82) прямых l_1 и l_2 может быть получено также из условия ортогональности направляющих векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ этих прямых: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

Условие параллельности прямых l_1 и l_2 в пространстве, эквивалентное условию коллинеарности их направляющих векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, заключается в пропорциональности координат этих векторов:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}. \tag{4.83}$$

Пример 4.6. Найти угол между прямыми

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1} \tag{4.84}$$

и

$$\begin{aligned} 2x - y \quad\ \ + 3 &= 0, \\ x + y - z + 1 &= 0. \end{aligned} \tag{4.85}$$

Решение. Вектор $\vec{a} = (1, 1, -1)$ — направляющий вектор прямой (4.84). В качестве направляющего вектора прямой (4.85)

может быть взят вектор $\vec{b} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, где $\vec{n}_1 = (2, -1, 0)$ и $\vec{n}_2 = (1, 1, -1)$ — нормальные векторы плоскостей, линией пересечения которых является прямая (4.85).

Итак,

$$\vec{b} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Так как $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = 0$, то прямые (4.84) и (4.85) — взаимно перпендикулярны, т. е. $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

§ 4.16. Угол между прямой и плоскостью. Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

В пространстве рассмотрим плоскость Π, заданную общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{4.86}$$

и прямую l, заданную каноническим уравнением

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \tag{4.87}$$

Углом между прямой l и плоскостью Π называется угол φ между этой прямой и ее проекцией на плоскость Π.

Это определение дает не один, а два угла, дополняющих друг друга до π (рис. 4.28).

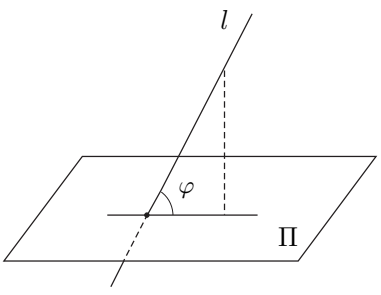


Рис. 4.28

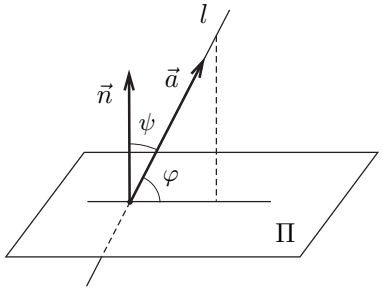


Рис. 4.29

Рассмотрим нормальный вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ плоскости (4.86) и направляющий вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ прямой (4.87). Угол между этими векторами обозначим через ψ. Так как угол

ψ всегда заключен между 0 и π, то его синус неотрицателен, причем, как нетрудно заметить (см. рис. 4.29), всегда

$$\sin\varphi = |\cos\psi|.$$

Поскольку

$$\cos\psi = \frac{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

то для определения угла φ между прямой l и плоскостью Π получим следующую формулу:

$$\sin\varphi = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}. \tag{4.88}$$

Условие параллельности прямой l и плоскости Π эквивалентно условию перпендикулярности векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{n} = (A, B, C)$ (рис. 4.30) и выражается равенством нулю скалярного произведения этих векторов:

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0. \tag{4.89}$$

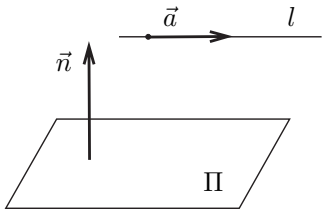


Рис. 4.30

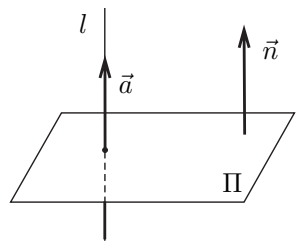


Рис. 4.31

Условие перпендикулярности прямой l и плоскости Π эквивалентно условию коллинеарности векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{n} = (A, B, C)$ (рис. 4.31) и выражается пропорциональностью координат этих векторов:

$$\frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3}. \tag{4.90}$$

§ 4.17. Некоторые задачи на прямую и плоскость в пространстве

1. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Так как нормальный вектор данной плоскости $\vec{n} = (A, B, C)$ является направляющим вектором перпендикулярной ей прямой (рис. 4.32), то искомое уравнение имеет вид

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}. \tag{4.91}$$

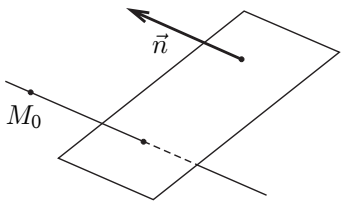


Рис. 4.32

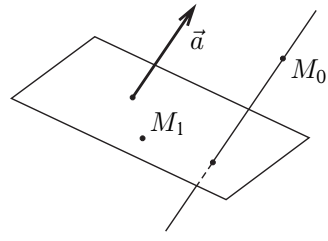


Рис. 4.33

2. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно данной прямой $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$.

Так как направляющий вектор данной прямой $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ является нормальным вектором перпендикулярной ей плоскости (рис. 4.33), то искомое уравнение имеет вид (см. (4.49)):

$$a_1(x - x_1) = a_2(y - y_1) = a_3(z - z_1). \tag{4.92}$$

3. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$ и данную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, не лежащую на этой прямой.

Нетрудно заметить, что искомая плоскость определяется точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и двумя неколлинеарными векторами $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $M_0M_1 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ (рис. 4.34).

Значит, в силу формулы (4.42), уравнением этой плоскости будет

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.93)$$

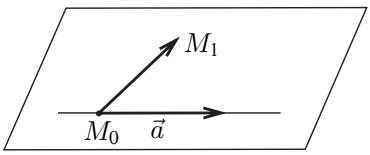


Рис. 4.34

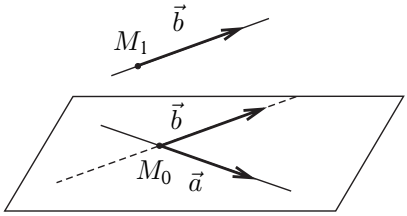


Рис. 4.35

4. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ и параллельной другой данной прямой $\frac{x-x_1}{b_1} = \frac{y-y_1}{b_2} = \frac{z-z_1}{b_3}$, при условии, что эти прямые не параллельны.

Заметим, что искомая плоскость определяется точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и двумя неколлинеарными (в силу условия) векторами $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ (рис. 4.35). Значит, в силу формулы (4.42) уравнение плоскости, удовлетворяющей указанным условиям, можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.94)$$

5. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ перпендикулярно данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, при условии, что данная прямая не перпендикулярна данной плоскости.

Заметим, что искомая плоскость определяется точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и двумя неколлинеарными (в силу условия) векторами $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ (направляющий вектор данной прямой) и $\vec{n} = (A, B, C)$ (нормальной вектор данной плоскости) (рис. 4.36). Значит, в силу формулы (4.42) уравнение плоскости,

удовлетворяющей указанным условиям, можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.95)$$

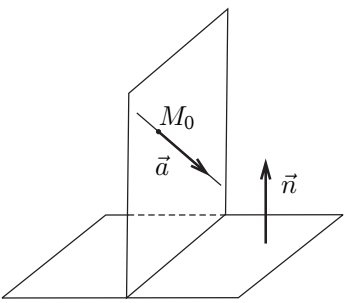


Рис. 4.36

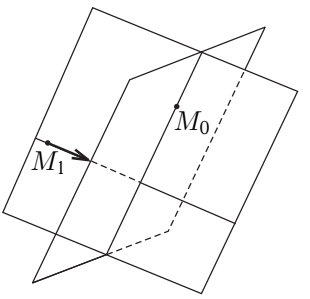


Рис. 4.37

6. Уравнение перпендикуляра, опущенного из заданной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на данную прямую $\dfrac{x-x_1}{a_1} = \dfrac{y-y_1}{a_2} = \dfrac{z-z_1}{a_3}$.

Искомый перпендикуляр (рис. 4.37) есть линия пересечения плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно данной прямой, с плоскостью, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и данную прямую. Уравнения этих плоскостей были получены в пп. 2 и 3 соответственно.

7. Нахождение расстояния от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до данной прямой $\dfrac{x-x_1}{a_1} = \dfrac{y-y_1}{a_2} = \dfrac{z-z_1}{a_3}$.

Для нахождения указанного расстояния следует

1) написать уравнение перпендикуляра, опущенного из данной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на данную прямую (см. п. 6);

2) решить совместно полученное уравнение с уравнением данной прямой и получить точку пересечения этих прямых $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 4.38);

3) найти требуемое расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

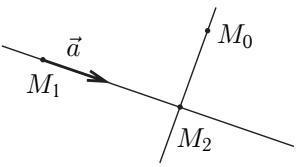


Рис. 4.38

8. Взаимное раположение двух прямых в пространстве. Две прямые $\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}$ и $\dfrac{x-x_1}{b_1}=\dfrac{y-y_1}{b_2}=\dfrac{z-z_1}{b_3}$ могут лежать или не лежать на одной плоскости (быть или не быть компланарными).

Нетрудно заметить, что для компланарности указанных прямых необходимым и достаточным условием является компланарность трех векторов: $\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$, $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, т. е. равенство

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0. \tag{4.96}$$

Следовательно, прямые не лежат на одной плоскости, т. е. скрещиваются, тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\neq 0. \tag{4.97}$$

Глава 5

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 5.1. Эллипс

Определение 5.1. Геометрическое место всех точек плоскости, координаты которых в некоторой прямоугольной системе координат Oxy удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.1}$$

где $a \geqslant b > 0$, называется *эллипсом*.

Система координат Oxy, в которой уравнение эллипса имеет вид (5.1), называется *канонической* (для этого эллипса), а само уравнение (5.1) называется *каноническим уравнением* эллипса.

При $a = b$ уравнение эллипса (5.1) принимает вид

$$x^2 + y^2 = a^2, \tag{5.2}$$

являющееся, очевидно, уравнением окружности радиуса a с центром в начале координат $O(0, 0)$. Итак, окружность является частным случаем эллипса.

Теперь сравним эллипс (5.1) с окружностью (5.2). Для этого обозначим $k = \dfrac{b}{a}$ и заметим, что если точка (x, y) принадлежит окружности (5.2), то точка (x, ky) принадлежит эллипсу (5.1). В самом деле, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{(ky)^2}{b^2} = \dfrac{x^2 + y^2}{a^2} = 1$. Верно и обратное утверждение: если точка (x, ky) принадлежит эллипсу (5.1), то точка (x, y) принадлежит окружности (5.2) (проверьте!).

Это означает, что *эллипс* (5.1) *получается из окружности* (5.2) *преобразованием* $(x, y) \to (x, ky)$, *геометрически представляющим собой сжатие плоскости к оси абсцисс в отношении* $k < 1$ (ведь $a > b$).

Итак, эллипс имеет форму, изображенную на рис. 5.1.

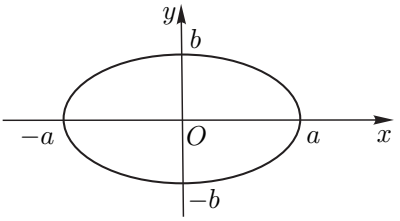


Рис. 5.1

Координатные оси Ox и Oy являются осями симметрии, а начало координат $O(0,0)$ — центром симметрии эллипса (5.1). В самом деле, если точка (x,y) принадлежит эллипсу (5.1), то точки $(x,-y)$, $(-x,y)$, $(-x,-y)$ также принадлежат этому эллипсу.

Теперь перечислим основные понятия, связанные с эллипсом (5.1).

Число a называется *большой полуосью*, а число b — *малой полуосью* эллипса.

Точки $(\pm a,0)$ и $(0,\pm b)$ называются *вершинами* эллипса.

Точка $O(0,0)$ называется *центром* эллипса.

Число $c=\sqrt{a^2-b^2}$ называется *линейным эксцентриситетом* эллипса.

Точки $F_1=(-c,0)$ и $F_2=(c,0)$ называются *фокусами* эллипса (рис. 5.2).

Число $2c$ называется *фокусным расстоянием* эллипса.

Число $e=\dfrac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* эллипса.

Число $p=\dfrac{b^2}{a}$ называется *фокальным параметром* эллипса.

Прямые $x=\pm\dfrac{a}{e}$ называются *директрисами* эллипса.

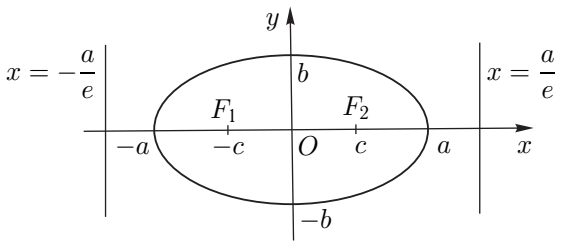


Рис. 5.2

Так как $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$, то очевидно, что $0\leqslant e<1$.

Заметим, что в случае окружности ($a = b$) имеем $c = 0$, $e = 0$, $p = a$, фокусы совпадают с центром окружности, а директрисы не определены.

§ 5.2. Фокальное свойство эллипса

Теорема 5.1. *Точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5.3}$$

тогда и только тогда, когда сумма расстояний точки $M(x, y)$ до фокусов эллипса равна $2a$.

Доказательство. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса (5.3). Через r_1 обозначим расстояние от точки $M(x, y)$ до левого фокуса $F_1(-c, 0)$, а через r_2 — до правого фокуса $F_2(c, 0)$ (рис. 5.3).

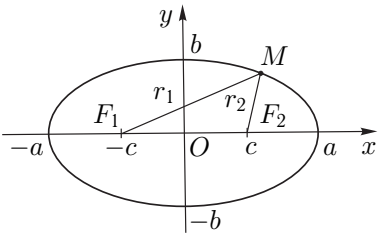


Рис. 5.3

Вычислим квадрат расстояния $r_1 = |MF_1|$ по формуле расстояния между двумя точками (3.20):

$$r_1^2 = (x + c)^2 + y^2 = x^2 + 2xc + c^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) x^2 + 2xc + c^2 + b^2 = \frac{c^2}{a^2}\, x^2 + 2xc + a^2 =$$

$$= e^2x^2 + 2xea + a^2 = (ex + a)^2.$$

Поскольку $|x| \leqslant a$ и $0 \leqslant e < 1$, то $|ex| < a$, а значит, $ex + a > 0$ и, следовательно,

$$r_1 = a + ex. \tag{5.4}$$

Точно такими же рассуждениями можно доказать формулу

$$r_2 = a - ex. \tag{5.5}$$

Из (5.4) и (5.5) получаем

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Пусть теперь сумма расстояний точки $M(x, y)$ до фокусов эллипса (5.3) равна $2a$:

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a. \tag{5.6}$$

Так как $|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$, а $|MF_2| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$, то равенство (5.6) примет вид

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

Перенеся один из корней вправо и возведя обе части в квадрат, получим

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2,$$

или

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - xc.$$

Возведем обе части последнего равенства в квадрат, раскроем скобку и приведем подобные члены:

$$x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

Учитывая, что $a^2 - c^2 = b^2$, получим

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Наконец, разделив обе части этого равенства на a^2b^2 окончательно получим уравнение (5.3), а это значит, что точка $M(x,y)$ принадлежит этому эллипсу.

Теорема доказана. □

Тем самым доказано, что *эллипс* (5.3) *является геометрическим местом точек, сумма расстояний которых до фокусов равна* $2a$.

Это свойство эллипса называется его *фокальным свойством*.

Фокальное свойство можно принимать в качестве эквивалентного определения эллипса: *эллипсом называется геометрическое место всех точек плоскости, сумма расстояний которых до двух фиксированных точек* F_1 *и* F_2 *этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.*

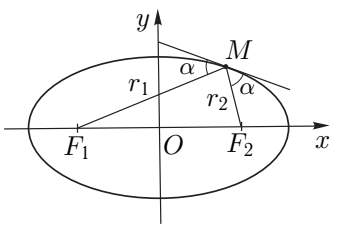


Рис. 5.4

Приведем без доказательства следующее свойство, называемое *оптическим* свойством эллипса: *лучи света, исходящие из одного фокуса,* F_1, *эллипса, после зеркального отражения от эллипса проходят через второй фокус,* F_2 (рис. 5.4). Геометрически указанное свойство означает, что отрезки MF_1 и MF_2 образуют с касательной в точке M эллипса равные углы.

§ 5.3. Директориальное свойство эллипса

Пусть дан эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{5.7}$$

где $a>b>0$.

Фокус и директриса эллипса называются *одноименными*, если они оба — левые $\left(F_1(-c,0)\text{ и }x=-\frac{a}{e}\right)$, или оба — правые $\left(F_2(c,0)\text{ и }x=\frac{a}{e}\right)$.

Теорема 5.2. *Точка $M(x,y)$ принадлежит эллипсу* (5.7) *тогда и только тогда, когда отношение расстояний точки $M(x,y)$ до фокуса и одноименной директрисы эллипса равно эксцентриситету e.*

Доказательство. Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка эллипса (5.7). Расстояние точки $M(x,y)$ до фокуса $F_1(-c,0)$ обозначим через r_1, а до одноименной ему директрисы $x=-\frac{a}{e}$ — через d_1 (рис. 5.5).

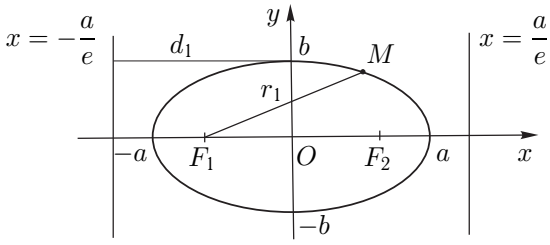


Рис. 5.5

Мы должны доказать, что

$$\frac{r_1}{d_1}=e. \tag{5.8}$$

Расстояние d_1 точки $M(x,y)$ до левой директрисы $x=-\frac{a}{e}$ согласно формуле расстояния от точки до прямой (4.19) равно

$$d_1=\left|x+\frac{a}{e}\right|=\frac{|ex+a|}{e}.$$

Но поскольку $r_1=ex+a$ (см. 5.4), то из последнего равенства получаем

$$d_1=\frac{r_1}{e},$$

откуда и следует требуемое равенство (5.8).

Точно так же, расстояние d_2 точки $M(x,y)$ до правой директрисы $x=\dfrac{a}{e}$ равно

$$d_2=\left|x-\frac{a}{e}\right|=\frac{|ex-a|}{e}.$$

И поскольку $r_2=a-ex$ (см. 5.5), то из последнего равенства получаем

$$d_2=\frac{r_2}{e},$$

откуда

$$\frac{r_2}{d_2}=e. \tag{5.9}$$

Пусть теперь отношение расстояний точки $M(x,y)$ до фокуса и одноименной директрисы эллипса (5.7) равно эксцентриситету e. Скажем,

$$\frac{r_1}{d_1}=e,$$

где r_1 — расстояние точки $M(x,y)$ до фокуса $F_1(-c,0)$, а d_1 — до одноименной директрисы $x=-\dfrac{a}{e}$.

Так как $r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, а $d_1=\left|x+\dfrac{a}{e}\right|=\dfrac{|ex+a|}{e}$, то последнее равенство принимает вид

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=|ex+a|,$$

или

$$(x+c)^2+y^2=(ex+a)^2.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, учитывая, что $c^2=a^2-b^2$ и $e=\dfrac{c}{a}$, придем к равенству

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Наконец, разделив обе части этого равенства на a^2b^2, окончательно получим уравнение (5.7), а это значит, что точка $M(x,y)$ принадлежит этому эллипсу.

В случае равенства

$$\frac{r_2}{d_2}=e,$$

где r_2 — расстояние точки $M(x,y)$ до фокуса $F_2(c,0)$, а d_2 — до одноименной директрисы $x=\dfrac{a}{e}$, точно такими же рассуждениями доказывается, что точка $M(x,y)$ принадлежит эллипсу (5.7).

Теорема доказана. □

Итак, мы пришли к важному заключению: *эллипс* (5.7) *является геометрическим местом точек, отношение расстояний которых до фокуса и одноименной директрисы равно эксцентриситету* e.

Это свойство называется *директориальным свойством* эллипса.

§ 5.4. Гипербола

Определение 5.2. Геометрическое место всех точек плоскости, координаты которых в некоторой прямоугольной системе координат Oxy удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.10}$$

где $a > 0$, $b > 0$, называется *гиперболой*.

Система координат Oxy, в которой уравнение гиперболы имеет вид (5.10), называется *канонической* (для этой гиперболы), а само уравнение (5.10) называется *каноническим уравнением* гиперболы.

При $a = b$ уравнение гиперболы (5.10) принимает вид

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{5.11}$$

Такая гипербола называется *равнобочной*.

Координатные оси Ox *и* Oy *являются осями симметрии, а начало координат* $O(0,0)$ *— центром симметрии гиперболы* (5.10).

В самом деле, если точка (x, y) принадлежит гиперболе (5.10), то точки $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$ также принадлежат этой гиперболе.

В силу симметрии, для построения гиперболы, заданной уравнением (5.10), достаточно построить кривую только в первой четверти ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) координатной системы.

Выразим из канонического уравнения (5.10) y как функцию от x при условии, что $y > 0$:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \tag{5.12}$$

и построим график этой функции по общей схеме исследования функций и построения графиков (см. [2, § 6.32]).

В первой четверти координатной плоскости аргумент функции принимает значения на бесконечном интервале $[a, +\infty)$, причем $y(a) = 0$. На интервале $(a, +\infty)$ функция монотонно возрастает, поскольку производная

$$y' = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

положительна на этом интервале.

Так как вторая производная

$$y'' = -\frac{ab}{(\sqrt{x^2 - a^2})^3}$$

отрицательна во всех точках интервала $(a, +\infty)$, то график функции имеет выпуклость, направленную вверх.

Рассматриваемую функцию можно представить в виде

$$y = \frac{b}{a}x - \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}},$$

где, как нетрудно заметить, функция $\dfrac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$ стремится к нулю при $x \to +\infty$. А это значит, что прямая

$$y = \frac{b}{a}x$$

является асимптотой графика данной функции (см. [2, § 6.31]).

По полученным данным строим график рассматриваемой функции $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (рис. 5.6).

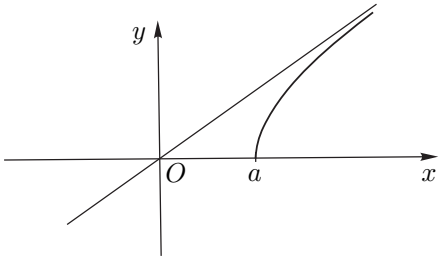


Рис. 5.6

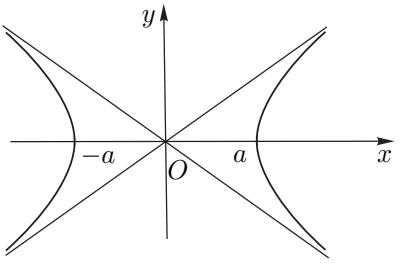


Рис. 5.7

Итак, в силу симметрии, гипербола имеет вид, изображенный на рис. 5.7.

Прямые $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

Теперь перечислим основные понятия, связанные с гиперболой (5.10).

Число a называется *действительной полуосью*, а число b — *мнимой полуосью* гиперболы.

Точки $(\pm a, 0)$ называются *вершинами* гиперболы.

Точка $O(0,0)$ называется *центром* гиперболы.

Число $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется *линейным эксцентриситетом* гиперболы.

Точки $F_1 = (-c, 0)$ и $F_2 = (c, 0)$ называются *фокусами* гиперболы.

Число $2c$ называется *фокусным расстоянием* гиперболы.

Число $e = \dfrac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Число $p = \dfrac{b^2}{a}$ называется *фокальным параметром* гиперболы.

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{e}$ называются *директрисами* гиперболы (см. рис. 5.8).

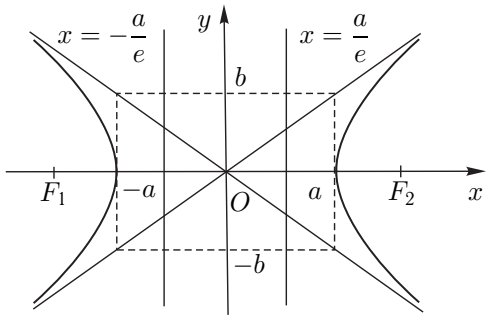


Рис. 5.8

Так как $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}}$, то очевидно, что *эксцентриситет гиперболы больше единицы*: $e > 1$.

§ 5.5. Фокальное свойство гиперболы

Теорема 5.3. *Точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.13}$$

тогда и только тогда, когда абсолютная величина разности расстояний точки $M(x, y)$ до фокусов гиперболы равна $2a$.

Доказательство. Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка гиперболы (5.13). Через r_1 обозначим расстояние от точки $M(x,y)$ до левого фокуса $F_1(-c,0)$, а через r_2 — до правого фокуса $F_2(c,0)$ (рис. 5.9).

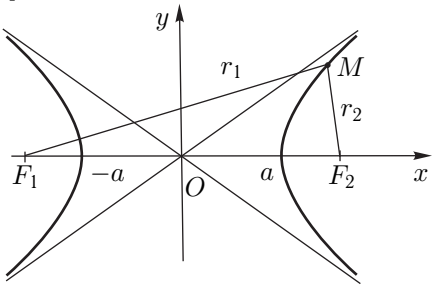


Рис. 5.9

Вычислим квадрат расстояния $r_1 = |MF_1|$ по формуле расстояния между двумя точками (3.20):

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2xc + c^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2xc + c^2 - b^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2xc + a^2 =$$

$$= e^2x^2 + 2xea + a^2 = (ex+a)^2.$$

Итак,

$$r_1^2 = (ex+a)^2. \tag{5.14}$$

Поскольку для гиперболы $|ex| > |x| \geqslant a$, то из последнего равенства получаем

$$r_1 = \begin{cases} a + ex & \text{при } x \geqslant a; \\ -a - ex & \text{при } x \leqslant a. \end{cases} \tag{5.15}$$

Точно такими же рассуждениями можно доказать формулу

$$r_2^2 = (ex-a)^2, \tag{5.16}$$

откуда имеем

$$r_2 = \begin{cases} -a + ex & \text{при } x \geqslant a; \\ a - ex & \text{при } x \leqslant -a. \end{cases} \tag{5.17}$$

Из (5.15) и (5.17) получаем

$$r_1 - r_2 = \begin{cases} 2a & \text{при } x \geqslant a; \\ -2a & \text{при } x \leqslant -a, \end{cases}$$

т. е. для всех $|x| \geqslant a$

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Пусть теперь абсолютная величина разности расстояний точки $M(x, y)$ до фокусов F_1 и F_2 равна $2a$:

$$\big||MF_1| - |MF_2|\big| = 2a. \tag{5.18}$$

Так как $|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, а $|MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, то равенство (5.18) имеет вид

$$\big|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,\big| = 2a.$$

После практически тех же преобразований, что и в случае эллипса (см. доказательство теоремы 5.1), мы получим для x и y соотношение (5.13), а это значит, что точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе.

Теорема доказана. □

Тем самым доказано, что *гипербола* (5.13) *является геометрическим местом точек, абсолютная величина разности расстояний которых до фокусов равна* $2a$.

Это свойство гиперболы называется ее *фокальным свойством*.

Фокальное свойство можно принимать в качестве эквивалентного определения гиперболы: *гиперболой называется геометрическое место всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух фиксированных точек* F_1 *и* F_2 *этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная*.

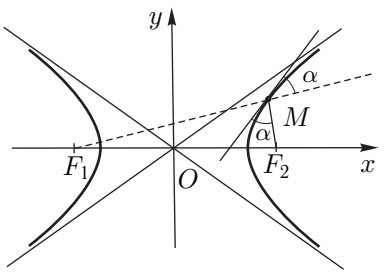


Рис. 5.10

Гипербола обладает также следующим замечательным свойством: *лучи света, исходящие из одного фокуса,* F_1, *гиперболы, после зеркального отражения от гиперболы кажутся исходящими из другого ее фокуса* F_2 (рис. 5.10). Это свойство называется *оптическим* свойством гиперболы.

§ 5.6. Директориальное свойство гиперболы

Пусть дана гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5.19}$$

Фокус и директриса гиперболы называются *одноименными*, если они оба — левые $\left(F_1(-c,0)$ и $x = -\dfrac{a}{e}\right)$, или оба — правые $\left(F_2(c,0)$ и $x = \dfrac{a}{e}\right)$.

Теорема 5.4. *Точка $M(x,y)$ принадлежит гиперболе* (5.19) *тогда и только тогда, когда отношение расстояний точки $M(x,y)$ до фокуса и одноименной директрисы гиперболы равно эксцентриситету e.*

Доказательство. Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка гиперболы (5.19). Расстояние точки $M(x,y)$ до фокуса $F_1(-c,0)$ обозначим через r_1, а до одноименной ему директрисы $x = -\dfrac{a}{e}$ — через d_1 (рис. 5.11).

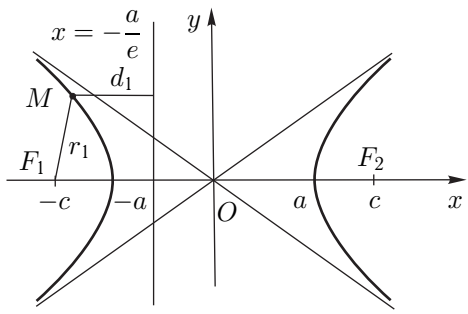


Рис. 5.11

Мы должны доказать, что

$$\frac{r_1}{d_1} = e. \tag{5.20}$$

Расстояние d_1 точки $M(x,y)$ до левой директрисы $x = -\dfrac{a}{e}$, согласно формуле расстояния от точки до прямой (4.19), равно

$$d_1 = \left|x + \frac{a}{e}\right| = \frac{|ex + a|}{e}.$$

Но поскольку $r_1 = |ex + a|$ (см. 5.14), то из последнего равенства получаем

$$d_1 = \frac{r_1}{e},$$

откуда и следует требуемое равенство (5.20).

Точно так же, расстояние d_2 точки $M(x, y)$ до правой директрисы $x = \frac{a}{e}$ равно

$$d_2 = \left|x - \frac{a}{e}\right| = \frac{|ex - a|}{e}.$$

И поскольку $r_2 = |ex - a|$ (см. 5.16), то из последнего равенства получаем

$$d_2 = \frac{r_2}{e},$$

откуда

$$\frac{r_2}{d_2} = e. \tag{5.21}$$

Пусть теперь отношение расстояний точки $M(x, y)$ до фокуса и одноименной директрисы гиперболы (5.19) равно эксцентриситету e. Скажем,

$$\frac{r_1}{d_1} = e,$$

где r_1 — расстояние точки $M(x, y)$ до фокуса $F_1(-c, 0)$, а d_1 — до одноименной директрисы $x = -\frac{a}{e}$.

Так как $r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$, а $d_1 = \left|x + \frac{a}{e}\right| = \frac{|ex + a|}{e}$, то последнее равенство принимает вид

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = |ex + a|,$$

или

$$(x + c)^2 + y^2 = (ex + a)^2.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, учитывая, что $c^2 = a^2 + b^2$ и $e = \frac{c}{a}$, мы придем к равенству

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Наконец, разделив обе части этого равенства на a^2b^2, окончательно получим уравнение (5.19), а это значит, что точка $M(x, y)$ принадлежит этой гиперболе.

В случае равенства

$$\frac{r_2}{d_2} = e,$$

где r_2 — расстояние точки $M(x, y)$ до фокуса $F_2(c, 0)$, а d_2 —

до одноименной директрисы $x = \dfrac{a}{e}$, точно такими же рассуждениями доказывается, что точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе (5.19).

Теорема доказана. □

Итак, мы пришли к важному заключению: *гипербола* (5.19) *является геометрическим местом точек, отношение расстояний которых до фокуса и одноименной директрисы равно эксцентриситету* e.

Это свойство называется *директориальным свойством* гиперболы.

§ 5.7. Парабола

Определение 5.3. Геометрическое место всех точек плоскости, координаты которых в некоторой прямоугольной системе координат Oxy удовлетворяют уравнению

$$y^2 = 2px, \tag{5.22}$$

где $p > 0$, называется *параболой*.

Система координат Oxy, в которой уравнение параболы имеет вид (5.22), называется *канонической* (для этой параболы), а само уравнение (5.22) называется *каноническим уравнением* параболы.

Ось абсцисс Ox *является осью симметрии параболы* (5.22).

В самом деле, если точка (x, y) принадлежит параболе (5.22), то симметричная относительно оси Ox точка $(x, -y)$ также принадлежит этой параболе.

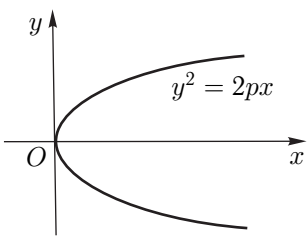


Рис. 5.12

Так как $p > 0$, то из канонического уравнения (5.22) следует, что парабола расположена в полуплоскости $x \geqslant 0$ и проходит через начало координат $O(0, 0)$.

Теперь заметим, что если поменять названия осей, т. е. перейти к новой системе координат $O\widetilde{x}\widetilde{y}$, где $\widetilde{x} = y$, а $\widetilde{y} = x$, то уравнение параболы (5.22) примет вид $\widetilde{y} = \dfrac{1}{2p}\widetilde{x}^2$. А это есть уравнение параболы, известное из школьной программы математики.

Итак, парабола (5.22) имеет вид, изображенный на рис. 5.12.

Перечислим основные понятия, связанные с параболой (5.22).
Точка $O(0,0)$ называется *вершиной* параболы.
Ось Ox называется *осью* параболы.
Число p называется *фокальным параметром* параболы.
Точка $F=\left(\frac{p}{2},0\right)$ называется *фокусом* параболы.
Число $\frac{p}{2}$ называется *фокусным расстоянием* параболы.
Прямая $x=-\frac{p}{2}$ называется *директрисой* параболы (см. рис. 5.13).

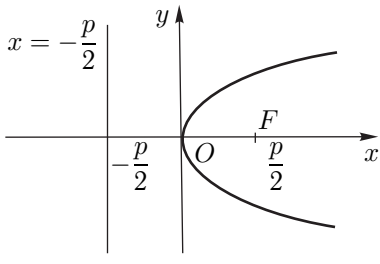


Рис. 5.13

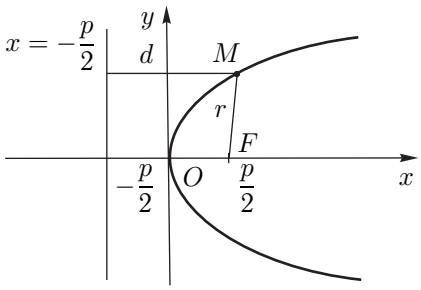


Рис. 5.14

Т е о р е м а 5.5. *Точка $M(x,y)$ принадлежит параболе* (5.22) *тогда и только тогда, когда она равноудалена от фокуса и директрисы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка $M(x,y)$ принадлежит параболе (5.22). Обозначим через r расстояние точки $M(x,y)$ до фокуса $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, а через d — расстояние до директрисы $x=-\frac{p}{2}$ (рис. 5.14).

Очевидно, что

$$d=x+\frac{p}{2}, \tag{5.23}$$

а

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}\,. \tag{5.24}$$

Вычислим расстояние r, учитывая равенство (5.22):

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px}=$$

$$=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=x+\frac{p}{2}$$

(ведь $x\geqslant 0$).

Итак, $r = d$.

Теперь предположим, что точка $M(x, y)$ равноудалена от фокуса и директрисы, т. е. $r = d$. В силу формул (5.23) и (5.24) это означает справедливость соотношения

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \tag{5.25}$$

Здесь следует отметить, что расстояние точки $M(x, y)$ до $x = -\frac{p}{2}$ вычисляется формулой (5.23) лишь для точек с неотрицательными абсциссами x. Точки с отрицательными абсциссами мы исключаем из рассмотрения, поскольку для них, как легко видеть, $r > d$.

Возведя обе части равенства (5.25) в квадрат, после очевидных преобразований, получим соотношение (5.22). А это значит, что точка $M(x, y)$ принадлежит этой параболе.

Теорема доказана. □

Замечание 5.1. Теоремы 5.2, 5.4 и 5.5 позволяют дать следующее определение эллипса (отличного от окружности), гиперболы и параболы.

Определение 5.4. Геометрическое место точек плоскости, отношение $e > 0$ расстояний которых до данной точки F, называемой фокусом, и данной прямой l, называемой директрисой, есть величина постоянная, представляет собой

1) эллипс, если $e < 1$;
2) гиперболу, если $e > 1$;
3) параболу, если $e = 1$.

Таким образом, эллипс, гипербола и парабола имеют единую «природу» — они могут быть получены одной и той же конструкцией. Различие лишь в величине эксцентриситета e.

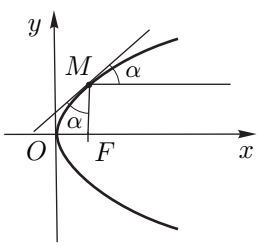


Рис. 5.15

Как эллипс и гипербола, парабола также обладает замечательным свойством, называемым *оптическим* свойством параболы: *лучи света, исходящие из фокуса параболы, после зеркального отражения от параболы образуют пучок, параллельный оси параболы* (рис. 5.15). Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы широко используются в инженерном деле. В частности, оптическое свойство параболы используется при конструировании прожекторов, антенн и телескопов.

§ 5.8. Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy. Напомним, что если начало координат O совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс — с полярной осью (рис. 5.16), то тогда связь прямоугольных координат x, y и полярных координат r, φ осуществляется формулами

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \end{aligned} \tag{5.26}$$

(см. [2, § 7.3]).

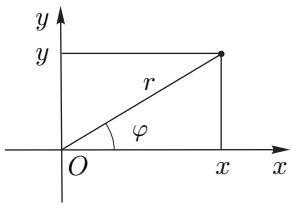


Рис. 5.16

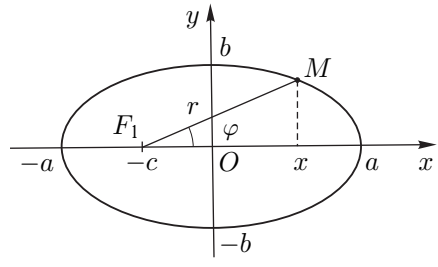


Рис. 5.17

Рассмотрим теперь отличный от окружности эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.27}$$

где $a > b > 0$.

На плоскости введем полярную систему координат, полюс которой совпадает с левым фокусом $F_1(-c, 0)$, а полярная ось направлена по оси абсцисс (рис. 5.17).

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса. Полярные координаты этой точки обозначим через r и φ. Тогда очевидно, что

$$x + c = r\cos\varphi. \tag{5.28}$$

Согласно теореме 5.2 эллипс есть геометрическое место точек $M(x, y)$, для которых $\dfrac{r}{d} = e$, т. е.

$$r = ed, \tag{5.29}$$

где d — расстояние от точки $M(x, y)$ до директрисы $x = -\dfrac{a}{e}$. Так как $d = \dfrac{a}{e} + x$, то подставляя это значение в (5.29) и учитывая,

что $x = -c + r\cos\varphi$ согласно (5.28), получим

$$r = ed = e\Big(\frac{a}{e} + x\Big) = a + ex = a + e(-c + r\cos\varphi) = \\ = a - ec + er\cos\varphi = p + er\cos\varphi$$

$\Big($ибо $a - ec = a - \dfrac{c^2}{a} = \dfrac{b^2}{a} = p\Big)$, т. е.

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \tag{5.30}$$

Это и есть уравнение эллипса в полярных координатах.

Теперь рассмотрим гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.31}$$

где $a > 0$, $b > 0$.

Введем полярную систему координат, полюс которой совпадает с правым фокусом $F_2(c, 0)$, а полярная ось направлена по оси абсцисс (рис. 5.18).

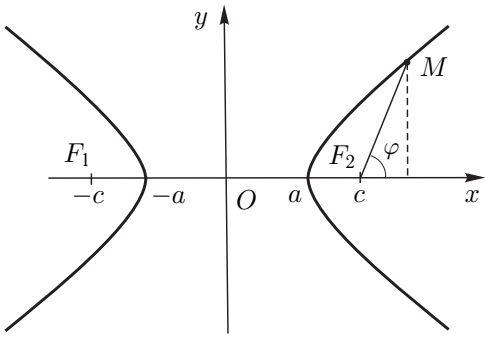


Рис. 5.18

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка гиперболы. Полярные координаты этой точки обозначим через r и φ. Тогда очевидно, что

$$x - c = r\cos\varphi. \tag{5.32}$$

Согласно теореме 5.4 гипербола есть геометрическое место точек $M(x, y)$, для которых $\dfrac{r}{d} = e$, т. е.

$$r = ed, \tag{5.33}$$

где d — расстояние от точки $M(x, y)$ до директрисы $x = \dfrac{a}{e}$.

Так как $d = x - \dfrac{a}{e}$, то подставляя это значение в (5.33) и учитывая, что $x = c + r\cos\varphi$ согласно (5.32), вычислим:

$$r = ed = e\left(x - \frac{a}{e}\right) = ex - a = e(c + r\cos\varphi) - a = \\ = ec - a + er\cos\varphi = p + er\cos\varphi$$

$\left(\text{ибо } ec - a = \dfrac{c^2}{a} - a = \dfrac{b^2}{a} = p\right)$. Откуда, опять получаем уравнение (5.30).

Наконец, для параболы

$$y^2 = 2px, \tag{5.34}$$

где $p > 0$, введем полярную систему координат, полюс которой совпадает с фокусом $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$, а полярная ось — с осью Ox в положительном направлении (рис. 5.19).

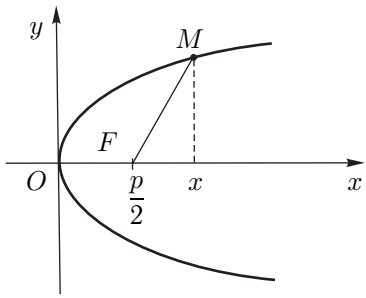


Рис. 5.19

Тогда, точно такими же рассуждениями, которые были изложены выше для эллипса и гиперболы, можно показать, что уравнение параболы в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}. \tag{5.35}$$

Итак, мы пришли к важному заключению: *эллипс*, *гипербола* (*точнее*, *одна ее ветвь*) *и парабола могут быть заданы в полярных координатах одним и тем же уравнением* (5.30). Причем, в случае эллипса — $0 < e < 1$, в случае гиперболы — $e > 1$, а в случае параболы — $e = 1$. Это еще раз подчеркивает единство этих линий.

§ 5.9. Преобразование прямоугольной системы координат плоскости

Переход от прямоугольной системы координат Oxy в какую-либо другую прямоугольную систему координат $O'x'y'$ называется *ортогональным преобразованием* или просто *преобразованием* системы координат Oxy (рис. 5.20).

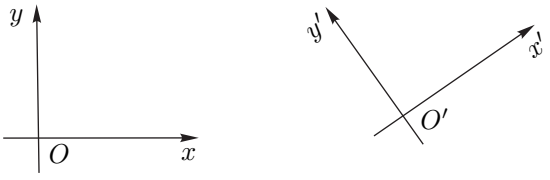


Рис. 5.20

В этом параграфе мы установим формулы, по которым преобразуются координаты любой точки плоскости при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой.

1. Параллельный перенос. Преобразование прямоугольной системы координат Oxy, при котором меняется начало координат, а направление осей и масштаб остаются неизменными, называется *параллельным переносом* прямоугольной системы координат Oxy.

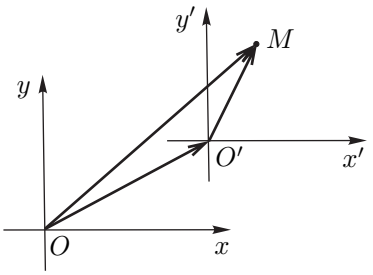


Рис. 5.21

Пусть в результате параллельного переноса прямоугольная система координат Oxy переходит в новую систему координат $O'x'y'$ (рис. 5.21).

Предположим, что начало координат O' имеет координаты (x_0, y_0) в координатной системе Oxy.

Рассмотрим теперь произвольную точку M плоскости, координаты которой в системе Oxy обозначим через (x, y), а в системе $O'x'y'$ — через (x', y').

Поставим перед собой задачу — выразить координаты (x, y) точки M в системе Oxy через ее же координаты (x', y') в системе $O'x'y'$.

В силу правила треугольника сложения векторов

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}. \tag{5.36}$$

Поскольку $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\overrightarrow{OO'} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$, а $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$, то из равенства (5.36) получим

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x', \\ y &= y_0 + y'. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Полученные формулы и называются *формулами преобразования координат точки* при параллельном переносе системы вдоль вектора $\overrightarrow{OO'}$.

2. Поворот системы координат. Преобразование прямоугольной системы координат Oxy, при котором обе оси поворачиваются на один и тот же угол, а начало координат и масштаб остаются неизменными, называется *поворотом* прямоугольной системы координат Oxy (рис. 5.22).

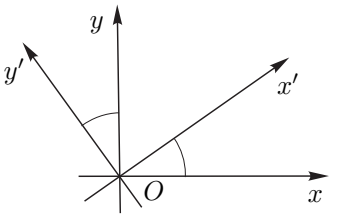


Рис. 5.22

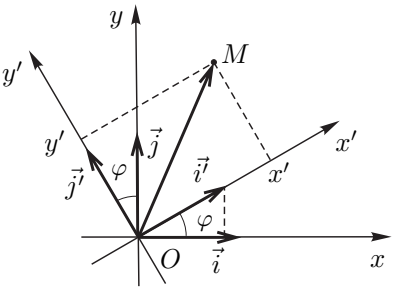


Рис. 5.23

Пусть $O'x'y'$ — прямоугольная система координат (с ортами $\vec{i'}$ и $\vec{j'}$), полученная в результате поворота системы Oxy (с ортами $\vec{i}$ и $\vec{j}$) на угол φ. Как и в случае параллельного переноса, координаты произвольной точки M плоскости в системе Oxy обозначим через (x, y), а в системе $O'x'y'$ — через (x', y') (рис. 5.23).

Заметим, что орты $\vec{i'}$ и $\vec{j'}$ в системе координат Oxy имеют координаты $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ и $(-\sin\varphi, \cos\varphi)$ соответственно, т. е.

$$\begin{aligned} \vec{i'} &= \quad \cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j}, \\ \vec{j'} &= -\sin\varphi \cdot \vec{i} + \cos\varphi \cdot \vec{j}. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Учитывая эти разложения, получим

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= x' \cdot \vec{i'} + y' \cdot \vec{j'} = \\ &= x'(\cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j}) + y'(-\sin\varphi \cdot \vec{i} + \cos\varphi \cdot \vec{j}) = \\ &= (x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)\vec{i} + (x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)\vec{j}. \end{aligned}$$

Но, поскольку, с другой стороны, $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$, следовательно,

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Эти формулы и называются *формулами преобразования координат точки* при повороте системы на угол φ.

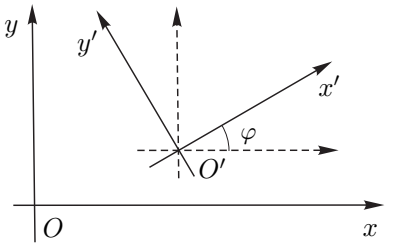


Рис. 5.24

Теперь предположим, что система $O'x'y'$ получена из системы Oxy путем *параллельного переноса вдоль вектора* $\overrightarrow{OO'}$ *и последующим поворотом вокруг точки* O' *на некоторый угол* φ (рис. 5.24).

Тогда, в силу (5.37) и (5.39), *формулы преобразования координат точки* примут вид:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ y &= y_0 + x' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Замечание 5.2. Отметим, что *каковы бы ни были две прямоугольные одинаково ориентированные системы координат* Oxy *и* $O'x'y'$, *первая из них может быть совмещена со второй посредством параллельного переноса вдоль вектора* $\overrightarrow{OO'}$ *и последующего поворота вокруг точки* O' *на некоторый угол* (см. рис. 5.24).

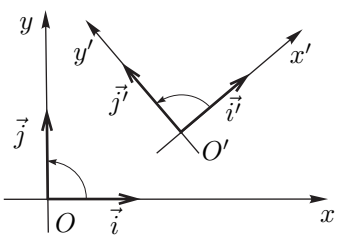


Рис. 5.25

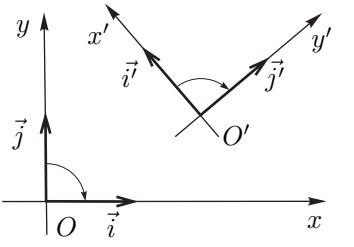


Рис. 5.26

Под *одинаковой ориентированностью* систем координат Oxy и $O'x'y'$ подразумевается, что кратчайшие повороты от орта $\vec{i}$ к орту $\vec{j}$ и от орта $\vec{i'}$ к орту $\vec{j'}$ совершаются в одном и том же направлении (рис. 5.25). В противном случае системы координат Oxy и $O'x'y'$ называются *противоположно ориентированными* (рис. 5.26).

§ 5.10. Линии второго порядка на плоскости. Приведение общего уравнения к простейшему виду

Многочленом $F(x, y)$ от двух переменных x и y называется сумма конечного числа *одночленов* вида $ax^p y^q$, где a — действительное число.

Степенью одночлена $ax^p y^q$ называется число $p + q$, а *степенью многочлена* $F(x, y)$ — наибольшая из степеней входящих в него одночленов.

Алгебраической линией (*кривой*) *n-го порядка* плоскости называется множество точек, координаты (x, y) которых в некоторой прямоугольной системе координат удовлетворяют соотношению вида

$$F(x, y) = 0, \tag{5.41}$$

где $F(x, y)$ — многочлен степени n. Соотношение (5.41) называется *уравнением* алгебраической линии.

Линии первого порядка задаются уравнениями вида

$$Ax + By + C = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов A и B отличен от нуля. Как мы уже знаем (см. теорему 4.1), это в точности все прямые на плоскости и только они.

Общее уравнение *линии второго порядка* по определению имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{5.42}$$

где хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12} и a_{22} отличен от нуля. Отметим, что коэффициенты при xy, x и y были обозначены соответственно через $2a_{12}$, $2a_{13}$ и $2a_{23}$ ради удобства преобразований уравнения (5.42).

Эллипс, гипербола и парабола являются примерами кривых второго порядка.

Важной задачей аналитической геометрии является исследование общего уравнения линии второго порядка (5.42) и приведение его к простейшему (каноническому) виду в несколько этапов.

Теорема 5.6. *С помощью поворота прямоугольной системы координат Oxy уравнение* (5.42) *приводится к виду*

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \tag{5.43}$$

где (x', y') *— координаты точки в системе* $Ox'y'$, *полученной в результате поворота.*

Доказательство. Пусть в исходном уравнении (5.42) коэффициент $a_{12} \neq 0$ (в случае $a_{12} = 0$ поставленный вопрос является решенным).

Пусть прямоугольная система координат $Ox'y'$ получена поворотом системы Oxy на угол φ. Тогда (см. (5.39)) формулы преобразования координат точки имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \end{aligned} \tag{5.44}$$

Подставляя эти выражения x и y в левую часть (5.42) и группируя коэффициенты при различных степенях x' и y', получим уравнение

$$a'_{11} x'^{\,2} + 2a'_{12} x'y' + a'_{22} y'^{\,2} + 2a'_{13} x' + 2a'_{23} y' + a'_{33} = 0, \tag{5.45}$$

где, как нетрудно убедиться,

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11} \cos^2\varphi + 2a_{12} \cos\varphi \sin\varphi + a_{22} \sin^2\varphi, \\ a'_{12} &= a_{12} \cos^2\varphi + (a_{22} - a_{11}) \cos\varphi \sin\varphi - a_{12} \sin^2\varphi, \\ a'_{22} &= a_{11} \sin^2\varphi - 2a_{12} \cos\varphi \sin\varphi + a_{22} \cos^2\varphi, \\ a'_{13} &= a_{13} \cos\varphi + a_{23} \sin\varphi, \\ a'_{23} &= -a_{13} \sin\varphi + a_{23} \cos\varphi, \\ a'_{33} &= a_{33}. \end{aligned} \tag{5.46}$$

Теперь выберем угол φ так, чтобы коэффициент a'_{12} обратился в нуль: $a'_{12} = 0$. Это требование приводит к уравнению

$$a_{12} \cos^2\varphi + (a_{22} - a_{11}) \cos\varphi \sin\varphi - a_{12} \sin^2\varphi = 0,$$

откуда легко получаем

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} \tag{5.47}$$

(ведь, по предположению, $a_{12} \neq 0$).

Итак, поворотом координатной системы Oxy на угол φ, определяемый равенством (5.47), уравнение (5.42) сводится к уравнению (5.43).

Теорема доказана. □

Приведение уравнения (5.42) к виду (5.43) посредством поворота координатной системы Oxy называется *стандартным упрощением* уравнения линии второго порядка.

Теорема 5.7. *Пусть в прямоугольной системе координат Oxy задано уравнение* (5.42) *и пусть* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$. *Тогда с помощью параллельного переноса прямоугольной системы координат Oxy уравнение* (5.42) *приводится к виду*

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + a'_{33} = 0, \tag{5.48}$$

где (x', y') — координаты точки в системе $O'x'y'$, полученной в результате параллельного переноса.

Доказательство. Пусть прямоугольная система координат $O'x'y'$ получена параллельным переносом систему Oxy вдоль вектора $\overrightarrow{OO'}$, где $O'(x_0, y_0)$ — некоторая точка плоскости. Как известно (см. (5.37)), формулы преобразования координат точки при этом преобразовании имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0, \\ y &= y' + y_0. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Подставляя эти значения x и y в левую часть (5.42), получим уравнение

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \tag{5.50}$$

где, как показывают тривиальные вычисления,

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}, \\ a'_{12} &= a_{12}, \\ a'_{22} &= a_{22}, \\ a'_{13} &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \\ a'_{23} &= a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}, \\ a'_{33} &= a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Теперь заметим, что в уравнении (5.50) коэффициенты a'_{13} и a'_{23} обратятся в нуль, если удастся подобрать координаты точки $O'(x_0, y_0)$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} &= 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} &= 0. \end{aligned} \tag{5.52}$$

А это всегда возможно, поскольку по условию теоремы $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$ и, следовательно, система (5.52) имеет единственное решение x_0, y_0.

Итак, при параллельном переносе прямоугольной системы Oxy вдоль вектора $\overrightarrow{OO'}$, где координаты точки $O'(x_0, y_0)$

определяются из системы (5.52), общее уравнение линии второго порядка (5.42) приводится к виду (5.48).

Теорема доказана. □

Замечание 5.3. Как следует из (5.51), *при параллельном переносе системы координат коэффициенты старших членов уравнения* (5.42) *не меняются*.

Определение 5.5. Уравнения (5.52) называются *уравнениями центра* линии второго порядка (5.42), а точка $O'(x_0, y_0)$, где x_0, y_0 — решение системы (5.52), называется *центром* этой линии.

Название «центр линии» объясняется тем, что если начало координат переносится в центр $O'(x_0, y_0)$, то уравнение линии второго порядка принимает вид (5.48), откуда следует, что если точка (x', y') принадлежит данной линии (т. е. координаты этой точки удовлетворяет уравнению (5.48)), то симметричная ей точка $(-x', -y')$ также принадлежит этой линии. Иначе говоря, *центр линии является ее центром симметрии*.

Следующая теорема является следствием теорем 5.6 и 5.7.

Теорема 5.8. *Пусть в прямоугольной системе координат Oxy задано уравнение* (5.42) *и пусть* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$. *Тогда с помощью параллельного переноса и последующего поворота прямоугольной системы координат Oxy уравнение* (5.42) *приводится к виду*

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33} = 0, \tag{5.53}$$

где (x', y') — координаты точки в системе $O'x'y'$, полученной в результате параллельного переноса и последующего поворота.

§ 5.11. Инвариантность выражения $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Классификация линий второго порядка

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy задано общее уравнение линии второго порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{5.54}$$

Функция $f(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33})$ от коэффициентов a_{ij} уравнения (5.54) называется *ортогональным инвариантом*, или просто *инвариантом* этого уравнения, если при переходе к произвольной

прямоугольной системе координат $O'x'y'$ ее значения не меняются, т. е.

$$f(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}) = f(a'_{11}, a'_{12}, \ldots, a'_{33}),$$

где a'_{ij} — коэффициенты уравнения линии второго порядка в новой системе координат $O'x'y'$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 5.9. *Выражение* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ *является инвариантом уравнения* (5.54).

Доказательство. Достаточно доказать, что выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ остается неизменным как при параллельном переносе, так и при повороте прямоугольной системы координат Oxy (см. замечание 5.2).

Действительно, при параллельном переносе этот факт очевиден, так как в этом случае, согласно формул (5.51), коэффициенты старших членов уравнения (5.54) не меняются.

Рассмотрим теперь поворот прямоугольной системы координат Oxy. Как было установлено в параграфе 5.10, коэффициенты a_{ij} уравнения (5.54) связаны с коэффициентами a'_{ij} уравнения, полученного в результате поворота, формулами (5.46). В силу этих формул, имеем

$$\begin{aligned} a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} &= (a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi)\times \\ &\times\ (a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\cos^2\varphi) - \\ &-\ (a_{12}\cos^2\varphi + (a_{22} - a_{11})\cos\varphi\sin\varphi - a_{12}\sin^2\varphi)^2. \end{aligned}$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} = a_{11}a_{22}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2 - a_{12}^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$

что и требовалось доказать. □

Выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ имеет важное значение в исследовании линий второго порядка. В зависимости от знака величины $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ линии второго порядка разделяются на следующие три типа:

1) *эллиптический*, если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$;

2) *гиперболический*, если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$;

3) *параболический*, если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$.

Так как выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ является инвариантом уравнения (5.54), то очевидно, что *тип линии не меняется при изменении прямоугольной системы координат*.

Ниже мы дадим полную классификацию каждого из указанных типов линий.

1). Линии эллиптического типа. По определению, $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. Согласно теореме 5.8, общее уравнение линии второго порядка (5.54) может быть приведено к виду

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \tag{5.55}$$

(для удобства записи в уравнении (5.53) опускаем штрихи у коэффициентов и координат).

Так как в рассматриваемом случае $\delta = a_{11}a_{22} > 0$, то, не теряя общности, можно предположить, что $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ (случай $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$ сводится к случаю $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ умножением уравнения (5.55) на -1).

Итак, пусть $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$. Для коэффициента a_{33} возможны следующие случаи:

а) $a_{33} < 0$. Тогда уравнение (5.55) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{-\dfrac{a_{33}}{a_{11}}} + \frac{y^2}{-\dfrac{a_{33}}{a_{22}}} = 1,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.56}$$

где $a^2 = -\dfrac{a_{33}}{a_{11}}$, $b^2 = -\dfrac{a_{33}}{a_{22}}$. А это есть *каноническое уравнение эллипса*.

б) $a_{33} > 0$. Тогда уравнение (5.55) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{\dfrac{a_{33}}{a_{11}}} + \frac{y^2}{\dfrac{a_{33}}{a_{22}}} = -1,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \tag{5.57}$$

где $a^2 = \dfrac{a_{33}}{a_{11}}$, $b^2 = \dfrac{a_{33}}{a_{22}}$.

Уравнению (5.57) не удовлетворяют координаты никакой точки плоскости. Оно называется уравнением *мнимого эллипса*.

в) $a_{33} = 0$. Тогда уравнение (5.55) принимает вид

$$\frac{x^2}{\dfrac{1}{a_{11}}} + \frac{y^2}{\dfrac{1}{a_{22}}} = 0,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \tag{5.58}$$

где $a^2 = \dfrac{1}{a_{11}}$, $b^2 = \dfrac{1}{a_{22}}$.

Уравнению (5.58) удовлетворяют координаты только одной точки $x = 0$, $y = 0$. Такое уравнение назовем уравнением *пары мнимых пересекающихся прямых*.

2). Линии гиперболического типа. По определению, $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$. Как и в случае линии эллиптического типа, общее уравнение линии гиперболического типа также сводится к виду

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0. \tag{5.59}$$

Так как в рассматриваемом случае $\delta = a_{11}a_{22} < 0$, то, не теряя общности, можно предположить, что $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$ (случай $a_{11} < 0$, $a_{22} > 0$ сводится к случаю $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$ умножением уравнения (5.59) на -1).

Итак, пусть $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$. Для коэффициента a_{33} рассмотрим два случая:

а) $a_{33} \neq 0$. Тогда уравнение (5.59), если $a_{33} < 0$, приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.60}$$

где $a^2 = -\dfrac{a_{33}}{a_{11}}$, $b^2 = \dfrac{a_{33}}{a_{22}}$.

Уравнение (5.60) есть *каноническое уравнение гиперболы*.

Заметьте, что если $a_{33} > 0$, то уравнение (5.59) также дает уравнение гиперболы.

б) $a_{33} = 0$. Тогда уравнение (5.59) приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \tag{5.61}$$

где $a^2 = \dfrac{1}{a_{11}}$, $b^2 = -\dfrac{1}{a_{22}}$.

Так как $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right)\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 0$, то уравнением (5.61) определяется *пара пересекающихся действительных прямых*.

3). Линии параболического типа. По определению, $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$. Согласно теореме 5.6, общее уравнение линии

второго порядка (5.54) может быть приведено к виду

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (5.62)$$

(для удобства записи в уравнении (5.43) опускаем штрихи у коэффициентов и координат).

Так как в рассматриваемом случае $\delta = a_{11}a_{22} = 0$, то следовательно, один из коэффициентов a_{11} или a_{22} равен нулю.

Не теряя общности, предположим, что $a_{11} = 0$, а $a_{22} \neq 0$. Тогда уравнение (5.62) можно представить в виде

$$a_{22}\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 + 2a_{13}x + a_{33} - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} = 0,$$

или

$$a_{22}\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 + 2a_{13}x + a'_{33} = 0,$$

где $a'_{33} = a_{33} - \dfrac{a_{23}^2}{a_{22}}$.

Перенесем начало координат параллельно оси Oy в точку $\left(0, -\dfrac{a_{23}}{a_{22}}\right)$, т. е. перейдем к новым координатам по формулам $x' = x,\ y' = y + \dfrac{a_{23}}{a_{22}}$. Получаем уравнение

$$a_{22}y'^2 + 2a_{13}x' + a'_{33} = 0. \qquad (5.63)$$

Теперь рассмотрим два случая:

а) $a_{13} \neq 0$. Запишем уравнение (5.63) в виде

$$a_{22}y'^2 + 2a_{13}\left(x' + \frac{a'_{33}}{2a_{13}}\right) = 0.$$

Перейдя к новым координатам по формулам $x'' = x' + \dfrac{a'_{33}}{2a_{13}}$, $y'' = y'$, получаем уравнение

$$a_{22}y''^2 + 2a_{13}x'' = 0,$$

или

$$y''^2 = 2px'', \qquad (5.64)$$

где $p = -\dfrac{a_{13}}{a_{22}}$.

Уравнение (5.64) есть *каноническое уравнение параболы*.

б) $a_{13} = 0$. Тогда уравнение (5.63) принимает вид

$$a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0. \qquad (5.65)$$

Если a_{22} и a'_{33} имеют разные знаки, то, полагая $a^2 = \left|\dfrac{a'_{33}}{a_{22}}\right|$, уравнение (5.65) можно записать в виде

$$y'^2 - a^2 = 0. \tag{5.66}$$

Это уравнение определяет *пару параллельных прямых*: $y' - a = 0$ и $y' + a = 0$.

Если a_{22} и a'_{33} имеют одинаковые знаки, то уравнение (5.65) принимает вид

$$y'^2 + a^2 = 0. \tag{5.67}$$

Этому уравнению не удовлетворяют координаты никакой точки плоскости. Оно называется уравнением *пары мнимых параллельных прямых*.

Наконец, если $a'_{33} = 0$, то уравнение (5.65) принимает вид

$$y'^2 = 0. \tag{5.68}$$

Этим уравнением определяется ось $O'x'$. Оно называется уравнением *пары совпадающих прямых*.

Заканчивая исследование общего уравнения линии второго порядка (5.54), сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 5.10 (об ортогональной классификации линий второго порядка). *Пусть в прямоугольной системе координат задано общее уравнение линии второго порядка*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Тогда существует такая прямоугольная система координат, в которой это уравнение принимает один из следующих девяти канонических видов:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (*эллипс*);

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ (*мнимый эллипс*);

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ (*пара мнимых пересекающихся прямых*);

4) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (*гипербола*);

5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ (*пара пересекающихся прямых*);

6) $y^2 = 2px$ (*парабола*);

7) $y^2 - a^2 = 0$ (*пара параллельных прямых*);

8) $y^2 + a^2 = 0$ (*пара мнимых параллельных прямых*);

9) $y^2 = 0$ (*пара совпадающих прямых*).

Глава 6

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 6.1. Понятие поверхности

Пусть заданы прямоугольная система координат $Oxyz$ и произвольная поверхность S пространства (рис. 6.1).

Говорят, что уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \tag{6.1}$$

является уравнением поверхности S в заданной системе координат, если ему удовлетворяют координаты любой точки $M(x, y, z) \in S$ и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности.

Итак, можно говорить, что S есть множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (6.1), или, что уравнение (6.1) определяет поверхность S.

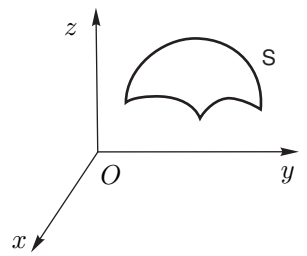


Рис. 6.1

Легко заметить, что в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \tag{6.2}$$

определяется сфера радиуса $R > 0$ с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Многочленом $F(x, y, z)$ от трех переменных x, y и z называется сумма конечного числа *одночленов* вида $ax^p y^q z^r$, где a — действительное число.

Степенью одночлена $ax^p y^q z^r$ называется число $p + q + r$, а *степенью многочлена* $F(x, y, z)$ — наибольшая из степеней входящих в него одночленов.

Алгебраической поверхностью, или просто *поверхностью* n-го порядка, называется поверхность, заданная уравнением (6.1), где $F(x, y, z)$ — многочлен степени n.

Очевидно, что *поверхности первого порядка* задаются уравнениями вида

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов A, B и C отличен от нуля. Поверхности первого порядка, как было установлено теоремой 4.4, это в точности все плоскости пространства, и только они.

Общее уравнение *поверхности второго порядка* по определению имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0. \quad (6.3)$$

В этой главе мы покажем, что поверхности второго порядка, за исключением случаев вырождения, можно разделить на пять классов: *эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, конусы* и *цилиндры*. Для каждой из поверхностей существует прямоугольная система координат, в которой поверхность задается простым уравнением, называемым *каноническим уравнением*.

В последующих параграфах мы проведем геометрическое исследование поверхностей второго порядка по заданным уравнениям с помощью *метода параллельных сечений*.

§ 6.2. Эллипсоиды

1. **Действительный эллипсоид**. *Действительным эллипсоидом* называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$ определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (6.4)$$

где $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Уравнение (6.4) называется *каноническим уравнением* эллипсоида, а прямоугольная система координат $Oxyz$ называется *канонической системой координат* для данного эллипсоида.

Положительные числа a, b и c называются *полуосями* эллипсоида (6.4).

Заметим, что при $a = b = c = R$ эллипсоид является сферой радиуса R, поскольку в этом случае его уравнение (6.4) принимает вид $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Чтобы представить себе форму эллипсоида, рассмотрим его сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Рассмотрим, например, плоскость $z = h$, параллельную плоскости Oxy. Линия, которая получается в сечении эллипсоида плоскостью $z = h$, определяется двумя уравнениями:

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ &z = h. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Исследуем (6.5) при различных значениях h.

1. При $|h| > c$ имеем $1 - \dfrac{h^2}{c^2} < 0$, следовательно, первым уравнением (6.5) определяется мнимый эллипс, т. е. точек пересечения плоскости $z = h$ с данным эллипсоидом не существует.

2. При $|h| = c$ имеем $1 - \dfrac{h^2}{c^2} = 0$, следовательно, первое уравнение (6.5) принимает вид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, откуда следует, что плоскость $z = h$ пересекается с данным эллипсоидом в точках $(0, 0, \pm c)$.

3. При $|h| < c$ имеем $1 - \dfrac{h^2}{c^2} > 0$. Если положить

$$\widetilde{a} = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad \widetilde{b} = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \tag{6.6}$$

то (6.5) примет вид

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{\widetilde{a}^2} + \frac{y^2}{\widetilde{b}^2} = 1, \\ &z = h. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Следовательно, плоскость $z = h$ пересекает эллипсоид по эллипсу с полуосями $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$. Причем при уменьшении $|h|$ значения $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ увеличиваются и достигают своих наибольших значений при $|h| = 0$ (см. (6.6)).

Аналогичная картина получается и при пересечении эллипсоида с плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxz и Oyz.

Все это дает вполне удовлетворительное представление о форме эллипсоида, общий вид которого изображен на рис. 6.2.

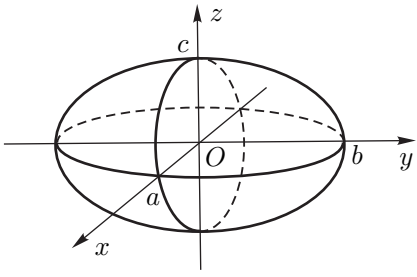


Рис. 6.2

Заметим, что эллипсоид может быть получен равномерным сжатием сферы относительно двух перпендикулярных плоскостей.

2. **Мнимый эллипсоид**. Поверхность, имеющая в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{6.8}$$

где $a \geqslant b \geqslant c > 0$, называется *мнимым эллипсоидом*. Мнимый эллипсоид не имеет ни одной вещественной точки.

§ 6.3. Гиперболоиды

1. **Однополостный гиперболоид**. *Однополостным гиперболоидом* называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{6.9}$$

где $a \geqslant b > 0$ и $c > 0$.

Прямоугольная система координат, в которой данный гиперболоид имеет уравнение вида (6.9), называется *канонической* для этого гиперболоида, а само уравнение (6.9) называется *каноническим уравнением* гиперболоида.

Установим вид однополостного гиперболоида (6.9). Для этого сначала рассмотрим его сечение координатной плоскостью Oxz, т. е. плоскостью $y = 0$. Очевидно, что это сечение задается уравнениями

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ &y=0, \end{aligned} \tag{6.10}$$

откуда следует, что в указанном сечении получается гипербола.

Точно так же, сечение гиперболоида (6.9) координатной плоскостью Oyz, т. е. плоскостью $x = 0$, задается уравнениями

$$\begin{aligned} &\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ &x = 0. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Следовательно, в этом сечении также получается гипербола.

Теперь рассмотрим сечение однополостного гиперболоида плоскостью $z = h$. Рассматриваемое сечение задается уравнениями

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ &z = h, \end{aligned} \tag{6.12}$$

или

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{\widetilde{a}^2} + \frac{y^2}{\widetilde{b}^2} = 1, \\ &z = h, \end{aligned} \tag{6.13}$$

где

$$\widetilde{a} = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\,, \quad \widetilde{b} = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\,. \tag{6.14}$$

Из (6.13) следует, что плоскость $z = h$ пересекает однополостный гиперболоид по эллипсу с полуосями $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$, определенными формулами (6.14). Причем, как видно из (6.14), полуоси $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ бесконечно возрастают при бесконечном возрастании $|h|$ и достигают своего наименьшего значения при $h = 0$. Иначе говоря, в сечении данного гиперболоида координатной плоскостью Oxy получается самый маленький эллипс с полуосями $\widetilde{a} = a$ и $\widetilde{b} = b$. Этот эллипс называется *горловым эллипсом* однополостного гиперболоида.

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют изобразить однополостный гиперболоид в виде бесконечно расширяющейся (в положительном и отрицательном направлении оси Oz) трубки (рис. 6.3).

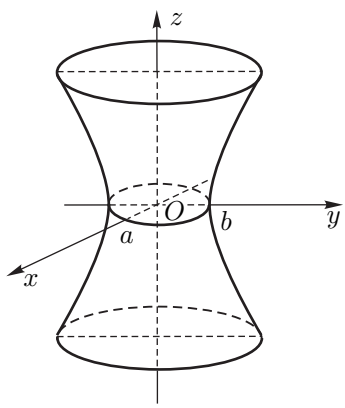


Рис. 6.3

Теперь заметим, что сечение гиперболоида (6.9) плоскостью $x = h$ задается уравнениями

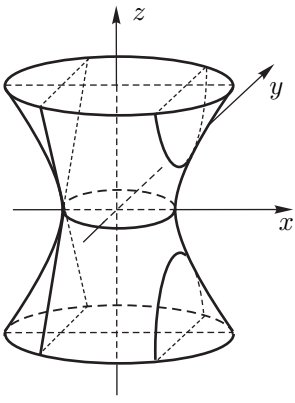


Рис. 6.4

$$\begin{aligned} &\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}, \\ &x = h. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Это сечение (см. рис. 6.4)

1) при $|h| < a$ является гиперболой с полуосями

$$b\sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}\,, \quad c\sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}\,,$$

2) при $|h| > a$ является гиперболой с полуосями

$$c\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}\,, \quad b\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}\,,$$

3) при $|h| = a$ является парой пересекающихся прямых:

$$\begin{aligned} &\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ &x = \pm a. \end{aligned}$$

Итак, есть прямые, которые целиком лежат на однополостном гиперболоиде. Можно доказать более общее утверждение: *через любую точку однополостного гиперболоида проходят две прямые, лежащие на нем*. Эти прямые называются *прямолинейными образующими* однополостного гиперболоида.

Наличие прямых, целиком лежащих на однополостном гиперболоиде, является его самым замечательным свойством.

2. **Двуполостный гиперболоид**. *Двуполостным гиперболоидом* называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \tag{6.16}$$

где $a \geqslant b > 0$ и $c > 0$.

Уравнение (6.16) называется *каноническим уравнением* двуполостного гиперболоида.

Установим вид двуполостного гиперболоида (6.16). Для этого сначала рассмотрим его сечение координатной плоскостью Oxz,

т. е. плоскостью $y = 0$. Очевидно, что это сечение задается уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$
$$y = 0,$$

откуда следует, что в указанном сечении получается гипербола.

Точно так же, сечение гиперболоида (6.16) координатной плоскостью Oyz, т. е. плоскостью $x = 0$ задается уравнениями

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$
$$x = 0.$$

Следовательно, в этом сечении также получается гипербола.

Теперь рассмотрим сечение данного гиперболоида плоскостью $z = h$, параллельной координатной плоскости Oxy. Линия, получающаяся в сечении, определяется уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1,$$
$$z = h,$$

откуда следует, что плоскость $z = h$

1) при $|h| < c$ не пересекает гиперболоид (6.16);
2) при $|h| = c$ имеет с гиперболоидом (6.16) единственную общую точку — $(0, 0, c)$ при $h = c$ и $(0, 0, -c)$ при $h = -c$;
3) при $|h| > c$ пересекает гиперболоид (6.16) по эллипсу с полуосями

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\,, \quad b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\,,$$

монотонно возрастающими от 0 до $+\infty$, когда $|h|$ возрастает от c до $+\infty$.

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют изобразить двуполостный гиперболоид как поверхность, состоящую из двух отдельных «полостей» (отсюда название двуполостный), каждая из которых имеет вид бесконечной выпуклой чаши (рис. 6.5).

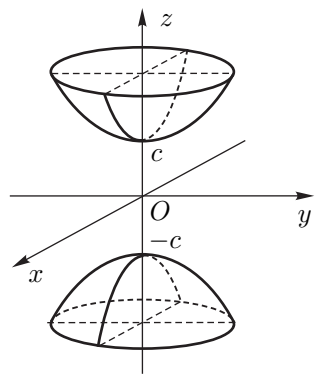


Рис. 6.5

§ 6.4. Параболоиды

1. **Эллиптический параболоид**. *Эллиптическим параболоидом* называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{6.17}$$

где $p \geqslant q > 0$.

Уравнение (6.17) называется *каноническим уравнением* эллиптического параболоида.

Исследуем с помощью сечений эту поверхность. Заметим, что плоскость $z = h$

1) при $h < 0$ не пересекает параболоид (6.17);
2) при $h = 0$ имеет с ним единственную общую точку $(0, 0, 0)$;
3) при $h > 0$ пересекает параболоид (6.17) по эллипсу с полуосями $\sqrt{2hp}$ и $\sqrt{2hq}$, монотонно возрастающими вместе с h от 0 до $+\infty$.

Теперь рассмотрим сечение данной поверхности координатной плоскостью Oxz, т. е. плоскостью $y = 0$. Получаем уравнения

$$\begin{aligned} x^2 &= 2pz, \\ y &= 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что в указанном сечении получается парабола с фокальным параметром p и с вершиной в начале координат $(0, 0, 0)$.

Точно так же, сечение эллиптического параболоида (6.17) координатной плоскостью Oyz, т. е. плоскостью $x = 0$, представляет собой параболу

$$\begin{aligned} y^2 &= 2qz, \\ x &= 0 \end{aligned}$$

с фокальным параметром q и вершиной в начале координат $(0, 0, 0)$.

Нетрудно заметить, что плоскости $y = h$ и $x = h$ также пересекают параболоид (6.17) по параболам с фокальными параметрами p и q, но уже с вершинами в точках $\left(0, h, \dfrac{h^2}{2q}\right)$ и $\left(h, 0, \dfrac{h^2}{2p}\right)$, соответственно.

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют изобразить эллиптический параболоид в виде бесконечной выпуклой чаши (рис. 6.6).

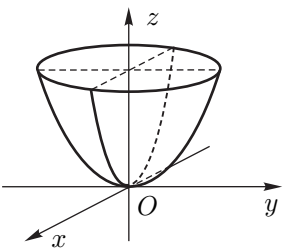


Рис. 6.6

Точка $(0,0,0)$ называется *вершиной* эллиптического параболоида, а числа p и q называются его *параметрами*.

2. **Гиперболический параболоид**. *Гиперболическим параболоидом* называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{6.18}$$

где $p > 0$ и $q > 0$.

Уравнение (6.18) называется *каноническим уравнением* гиперболического параболоида.

Выясним геометрический вид поверхности (6.18). Заметим, что плоскость $z = h$

1) при $h < 0$ пересекает гиперболический параболоид (6.18) по гиперболе, действительная ось которой параллельна оси Oy, а мнимая — оси Ox;
2) при $h = 0$ пересекает параболоид (6.18) по паре прямых

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0, \\ &z = 0; \end{aligned}$$

3) при $h > 0$ пересекает гиперболический параболоид по гиперболе, действительная ось которой (в противоположность случаю $h < 0$) параллельна оси Ox, а мнимая — оси Oy.

Рассмотрим теперь сечение гиперболического параболоида координатной плоскостью Oxz, т. е. плоскостью $y = 0$. Это сечение задается уравнениями

$$\begin{aligned} &x^2 = 2pz, \\ &y = 0, \end{aligned}$$

что представляет собой параболу с фокальным параметром p, вершиной в точке $(0,0,0)$ и ветвями, направленными вверх.

Точно так же, сечение гиперболического параболоида координатной плоскостью Oyz, т. е. плоскостью $x = 0$, представляет

собой параболу

$$y^2 = 2qz,$$
$$x = 0$$

с фокальным параметром q, вершиной в точке $(0, 0, 0)$ и ветвями, направленными вниз.

В общем случае, плоскости $y = h$ и $x = h$ пересекают гиперболический параболоид (6.18) тоже по параболам с фокальными параметрами p и q и с вершинами в точках $\left(0, h, -\frac{h^2}{2q}\right)$ и $\left(h, 0, -\frac{h^2}{2p}\right)$, соответственно. Причем, ветви первой параболы направлены вверх, а ветви второй — вниз.

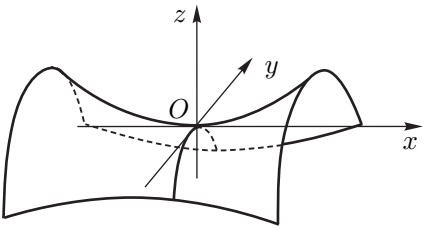


Рис. 6.7

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют изобразить гиперболический параболоид в виде седлообразной поверхности (рис. 6.7).

Замечание 6.1. Как и однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид обладает следующим замечательным свойством: *через любую точку гиперболического параболоида проходят две прямые, лежащие на нем*. Эти прямые называются *прямолинейными образующими* гиперболического параболоида.

§ 6.5. Конусы второго порядка

1. **Действительный конус второго порядка**. *Действительным конусом второго порядка* называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$ задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{6.19}$$

где $a \geqslant b > 0$ и $c > 0$.

Уравнение (6.19) называется *каноническим уравнением* конуса, а прямоугольная система координат $Oxyz$ называется *канонической системой координат* для данного конуса.

Заметим, что плоскость $z = h$

1) при $h \neq 0$ пересекает конус второго порядка (6.19) по эллипсу
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2},$$
$$z = h$$
с полуосями
$$\frac{a|h|}{c} \quad \text{и} \quad \frac{b|h|}{c},$$
монотонно возрастающими вместе с |h| от 0 до $+\infty$;
2) при $h = 0$ пересекает конус (6.19) по точке $(0, 0, 0)$.

Плоскость $x = h$

1) при $h = 0$ пересекает конус второго порядка по паре прямых
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$
$$x = 0;$$
2) при $h \neq 0$ пересекает конус (6.19) по гиперболе
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{a^2},$$
$$x = h$$
с полуосями
$$\frac{c|h|}{a} \quad \text{и} \quad \frac{b|h|}{a}.$$

Плоскость $y = h$

1) при $h = 0$ пересекает конус второго порядка по паре прямых
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$
$$y = 0;$$
2) при $h \neq 0$ пересекает конус (6.19) по гиперболе
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{b^2},$$
$$y = h$$
с полуосями
$$\frac{c|h|}{b} \quad \text{и} \quad \frac{a|h|}{b}.$$

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют представить конус в виде поверхности, изображенной на рис. 6.8.

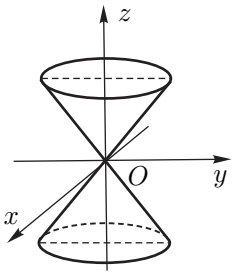


Рис. 6.8

Ось Oz называется *осью конуса*. Точка $(0,0,0)$ называется *вершиной конуса*.

2. **Мнимый конус второго порядка**. Поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad (6.20)$$

где $a \geqslant b \geqslant c > 0$, называется *мнимым конусом второго порядка*.

Эта поверхность имеет единственную вещественную точку $(0,0,0)$.

§ 6.6. Цилиндрические поверхности

Пусть в пространстве задана прямоугольная система координат $Oxyz$.

Определение 6.1. Поверхность S называется *цилиндрической поверхностью* с образующей, параллельной оси Oz, если она вместе с каждой своей точкой целиком содержит также прямую, проходящую через эту точку и параллельную оси Oz (рис. 6.9).

Любую, целиком лежащую на цилиндрической поверхности S, прямую называют *образующей* этой поверхности. Пересечение цилиндрической поверхности S с координатной плоскостью Oxy называется *направляющей линией* этой поверхности.

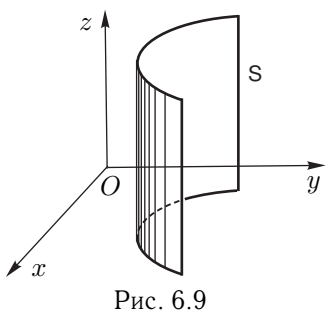


Рис. 6.9

Совершенно аналогично определяются цилиндрические поверхности с образующими, параллельными осям Ox или Oy.

Ради определенности будем рассматривать цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz.

Нетрудно заметить, что *всякое уравнение вида*

$$F(x,y)=0, \qquad (6.21)$$

связывающее две переменные x и y и не содержащее z, определяет цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz, причем уравнение (6.21) на координатной плоскости

Oxy определяет направляющую этой цилиндрической поверхности. В пространстве эта направляющая определяется двумя уравнениями:

$$F(x, y) = 0,$$
$$z = 0,$$

первое из которых определяет рассматриваемую цилиндрическую поверхность, а второе — координатную плоскость Oxy.

Например, в пространстве уравнение

$$x^2 + y^2 = r^2$$

определяет *круговой цилиндр* с образующей, параллельной оси Oz, и с направляющей, представляющей собой лежащую в координатной плоскости Oxy окружность радиуса r с центром в начале координат (рис. 6.10).

Теперь рассмотрим цилиндрические поверхности второго порядка.

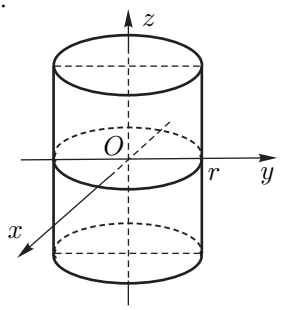


Рис. 6.10

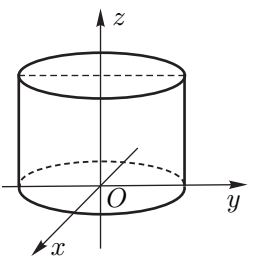


Рис. 6.11

1. **Действительный эллиптический цилиндр**. *Действительным эллиптическим цилиндром* называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{6.22}$$

где $a \geqslant b > 0$.

Уравнение (6.22) называется *каноническим уравнением* эллиптического цилиндра.

Очевидно, что эллиптический цилиндр (6.22) — это цилиндрическая поверхность, для которой эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ на координатной плоскости Oxy является направляющей линией. Следовательно, эллиптический цилиндр имеет форму, изображенную на рис. 6.11.

В случае $a = b = r$ эллиптический цилиндр превращается в *круговой цилиндр* $x^2 + y^2 = r^2$.

2. **Мнимый эллиптический цилиндр**. *Мнимым эллиптическим цилиндром* называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \tag{6.23}$$

где $a \geqslant b > 0$.

Эта поверхность не имеет вещественных точек.

3. **Гиперболический цилиндр**. *Гиперболическим цилиндром* называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{6.24}$$

где $a > 0$ и $b > 0$.

Гиперболический цилиндр — это цилиндрическая поверхность, для которой гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ на координатной плоскости Oxy является направляющей кривой. Гиперболический цилиндр имеет форму, изображенную на рис. 6.12.

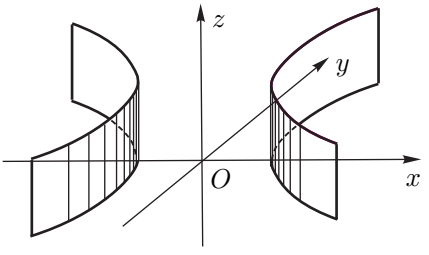


Рис. 6.12

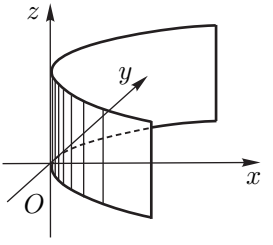


Рис. 6.13

4. **Параболический цилиндр**. *Параболическим цилиндром* называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат задается уравнением

$$y^2 = 2px, \tag{6.25}$$

где $p > 0$.

Параболический цилиндр — это цилиндрическая поверхность, для которой парабола $y^2 = 2px$ на координатной плоскости Oxy является направляющей кривой. Параболический цилиндр имеет форму, изображенную на рис. 6.13.

Теперь перечислим цилиндрические поверхности второго порядка, для которых направляющими кривыми являются пары прямых (пересекающихся, параллельных, совпадающих, действительных или мнимых).

5. **Пара мнимых плоскостей, пересекающихся по вещественной прямой**. Поверхность, задаваемая в некоторой прямоугольной системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \tag{6.26}$$

где $a > 0$ и $b > 0$, называется *парой мнимых плоскостей, пересекающихся по вещественной прямой*.

Очевидно, что вещественными точками этой поверхности являются точки прямой

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= 0, \end{aligned}$$

т. е. точки оси Oz.

6. **Пара пересекающихся действительных плоскостей**. Поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \tag{6.27}$$

где $a > 0$ и $b > 0$, называется *парой пересекающихся действительных плоскостей*.

Эта поверхность имеет форму изображенную на рис. 6.14.

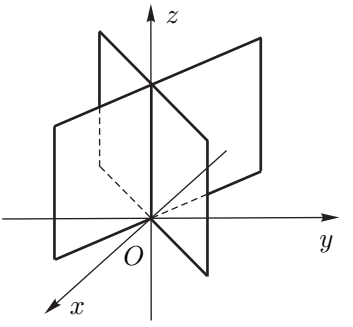


Рис. 6.14

7. **Пара параллельных различных действительных плоскостей**. Поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат задается уравнением

$$y^2 - b^2 = 0, \tag{6.28}$$

где $b > 0$, называется *парой параллельных различных действительных плоскостей* (рис. 6.15).

8. **Пара параллельных различных мнимых плоскостей**. Поверхность, задаваемая в некоторой прямоугольной системе координат уравнением

$$y^2 + b^2 = 0, \tag{6.29}$$

где $b > 0$, называется *парой параллельных различных мнимых плоскостей*.

Эта поверхность не имеет вещественных точек.

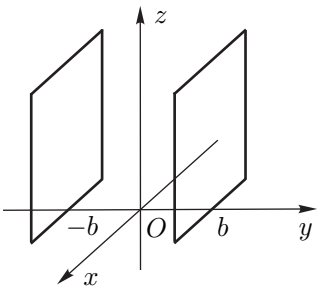


Рис. 6.15

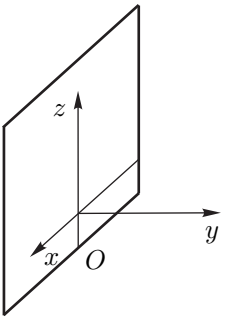


Рис. 6.16

9. **Пара совпадающих действительных плоскостей**. Поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат задается уравнением

$$y^2 = 0 \tag{6.30}$$

называется *парой совпадающих действительных плоскостей* (рис. 6.16).

§ 6.7. Теорема об ортогональной классификации поверхностей второго порядка

Общим итогом этой главы является следующая *теорема об ортогональной классификации поверхностей второго порядка*

Теорема 6.1. *Любая поверхность второго порядка принадлежит к одному из следующих семнадцати классов*:

1) *Эллипсоиды действительные* (6.4);
2) *Эллипсоиды мнимые* (6.8);
3) *Гиперболоиды однополостные* (6.9);
4) *Гиперболоиды двуполостные* (6.16);
5) *Параболоиды эллиптические* (6.17);

6) *Параболоиды гиперболические* (6.18);
7) *Конусы действительные* (6.19);
8) *Конусы мнимые* (6.20);
9) *Цилиндры эллиптические действительные* (6.22);
10) *Цилиндры эллиптические мнимые* (6.23);
11) *Цилиндры гиперболические* (6.24);
12) *Цилиндры параболические* (6.25);
13) *Поверхности, распадающиеся на пару мнимых плоскостей, пересекающихся по вещественной прямой* (6.26);
14) *Поверхности, распадающиеся на пару пересекающихся действительных плоскостей* (6.27);
15) *Поверхности, распадающиеся на пару параллельных различных действительных плоскостей* (6.28);
16) *Поверхности, распадающиеся на пару параллельных различных мнимых плоскостей* (6.29);
17) *Поверхности, распадающиеся на пару совпадающих действительных плоскостей* (6.30).

Глава 7

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 7.1. Понятие линейного пространства

Пусть L — произвольное непустое множество. Говорят, что на множестве L задана операция *сложения* элементов, обозначаемая знаком «+», и операция *умножения элемента на число*, если

1) имеется правило, посредством которого любым двум элементам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ множества L ставится в соответствие некоторый элемент $\mathbf{z}$ этого множества, называемый *суммой* элементов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и обозначаемый символом $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$;

2) имеется правило, посредством которого любому элементу $\mathbf{x}$ множества L, и любому вещественному (комплексному) числу λ, ставится в соответствие некоторый элемент $\mathbf{z}$ этого множества, называемый произведением числа λ на элемента $\mathbf{x}$ и обозначаемый символом $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x}$.

Определение 7.1. Множество L называется *вещественным* (*комплексным*) *линейным* или *векторным* пространством, если на нем определены операции сложения элементов и умножения элемента на вещественное (комплексное) число, которые удовлетворяют следующим восьми аксиомам:

1°) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (свойство коммутативности);

2°) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (свойство ассоциативности суммы);

3°) существует *нулевой* элемент $\mathbf{0}$ такой, что $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ (свойство существования нулевого элемента);

4°) для каждого элемента $\mathbf{x}$ существует *противоположный* элемент $\mathbf{x}'$ такой, что $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{0}$ (свойство существования противоположного элемента);

5°) $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$ (свойство ассоциативности относительно числового множителя);

6°) $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$ (свойство дистрибутивности относительно суммы числовых множителей);
7°) $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$ (свойство дистрибутивности относительно суммы элементов);
8°) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (свойство нормированности).

Из аксиом 1°)–8°) следуют ряд утверждений, которые справедливы для произвольных линейных пространств.

Сначала заметим, что *нулевой элемент линейного пространства единственен*.

В самом деле, предположим, что существуют два нулевых элемента $\mathbf{0}_1$ и $\mathbf{0}_2$. Тогда, в силу аксиомы 3°), с одной стороны $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1$ $(\mathbf{0}_1 = \mathbf{x})$, а с другой – $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$ $(\mathbf{0}_2 = \mathbf{x})$. Значит, $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$.

Точно так же, можно доказать, что *каждый элемента* $\mathbf{x}$ *линейного пространства* L *имеет единственный противоположный элемент*.

Действительно, пусть элемент $\mathbf{x}$ имеет два противоположных элемента $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$. Это значит, что $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{0}$ и $\mathbf{x} + \mathbf{x}'' = \mathbf{0}$. Но тогда, в силу аксиом 3°), 2°) и 1°) получим

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}' + \mathbf{0} = \mathbf{x}' + (\mathbf{x} + \mathbf{x}'') = (\mathbf{x}' + \mathbf{x}) + \mathbf{x}'' = \\ = (\mathbf{x} + \mathbf{x}') + \mathbf{x}'' = \mathbf{0} + \mathbf{x}'' = \mathbf{x}''.$$

Противоположный элемент элемента $\mathbf{x}$ обозначается через $-\mathbf{x}$. Итак, $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Для произвольного элемента $\mathbf{x} \in L$ *справедливо равенство* $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Это следует из цепочки равенств:

$$0 \cdot \mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{x} + (-\mathbf{x})) = (0 \cdot \mathbf{x} + 1 \cdot \mathbf{x}) + (-\mathbf{x}) = \\ = (0 + 1) \cdot \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 1 \cdot \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Наконец, *противоположный элемент любого элемента* $\mathbf{x} \in L$ *равен произведению этого элемента* $\mathbf{x}$ *на число* -1, *то есть* $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$.

В самом деле, $\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = 1\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = (1 - 1)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Итак, $\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, откуда и следует, что $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

Теперь приведем примеры линейных пространств.

Пример 7.1. Множество всех векторов плоскости или трехмерного пространства является линейным пространством относительно операций сложения двух векторов и умножения вектора на число. Справедливость аксиом 1°)–8°) проверяется без особого труда (см. гл. 3, теоремы 3.1 и 3.2).

Пример 7.2. Рассмотрим множество L, элементами которого служат упорядоченные совокупности n вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В этом множестве определим операции сложения элементов и умножения элемента на число следующими формулами:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Справедливость аксиом 1°)–8°) проверяется элементарно. Отметим только, что нулевым элементом рассматриваемого множества является элемент $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, а противоположным элементом элемента $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является элемент $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

Итак, множество L с указанными действиями является линейным пространством. Это линейное пространство называется *вещественным n-мерным векторным* (*линейным*) *пространством* и обозначается через $\mathbf{R}^n$.

Элементы линейного пространства $\mathbf{R}^n$ называются также *векторами*.

Пример 7.3. Рассмотрим множество $C[a, b]$ непрерывных на некотором отрезке $[a, b]$ функций. Нетрудно проверить, что множество $C[a, b]$ является линейным пространством относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на число.

Пример 7.4. Множество всех многочленов степени не выше n является линейным пространством относительно указанных в предыдущем примере операций.

Пример 7.5. Множество всех решений однородной системы линейных уравнений (2.15) является линейным пространством (см. теорему 2.5).

Во всех этих примерах справедливость аксиом 1°)–8°) линейного пространства проверяется элементарно.

§ 7.2. Линейная зависимость элементов линейного пространства

Пусть L — произвольное линейное пространство, а $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_k$ — произвольные его элементы.

Выражение вида $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{x}_k$ (7.1)

называется *линейной комбинацией* элементов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_k$ с коэффициентами λ_1, λ_2, ..., λ_k.

Линейная комбинация (7.1) называется *тривиальной*, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Если хотя бы одно из чисел λ_1, λ_2, ..., λ_k не равно нулю, то линейная комбинация (7.1) называется *нетривиальной*.

Очевидно, что тривиальная линейная комбинация любых элементов линейного пространства L всегда равна нулевому элементу $\mathbf{0}$ этого пространства.

Определение 7.2. Элементы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_k$ пространства L называются *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих элементов, которая равна нулевому элементу $\mathbf{0}$ линейного пространства L. Иначе говоря, если существуют такие числа λ_1, λ_2, ..., λ_k, не все равные нулю, что справедливо равенство

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \tag{7.2}$$

Элементы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_k$ называются *линейно независимыми*, если они не являются линейно зависимыми, иначе говоря, если равенство (7.2) справедливо лишь в случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Очевидно, что *если один из элементов* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_k$ *является нулевым, то эти элементы линейно зависимы.*

Действительно, если, например, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, то равенство (7.2) справедливо при $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Нетрудно заметить также, что *если часть элементов* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_k$ *линейно зависима, то и все эти элементы линейно зависимы.*

В самом деле, пусть элементы $\mathbf{x}_1$, ..., $\mathbf{x}_m$, $m < k$, — линейно зависимы, то есть $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_m\mathbf{x}_m = \mathbf{0}$, где хотя бы один коэффициент отличен от нуля. Но тогда справедливо равенство $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_m\mathbf{x}_m + 0 \cdot \mathbf{x}_{m+1} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, где не все коэффициенты равны нулю. А это значит, что элементы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_k$ линейно зависимы.

Теорема 7.1. *Элементы* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ *являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией остальных элементов.*

Доказательство. Пусть элементы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_k$ линейно зависимы, то есть справедливо равенство (7.2), где хотя бы одно из чисел λ_1, λ_2, ..., λ_k отлично от нуля. Не теряя общности,

предположим, что $\lambda_1 \neq 0$. Тогда, поделив равенство (7.2) на $\lambda_1 \neq 0$ и обозначив $\mu_2 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}, \ldots, \mu_k = -\dfrac{\lambda_k}{\lambda_1}$, получим

$$\mathbf{x}_1 = \mu_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \mu_k \mathbf{x}_k, \tag{7.3}$$

а это и значит, что элемент $\mathbf{x}_1$ является линейной комбинацией элементов $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_k$.

Теперь предположим, что один из элементов, например, элемент $\mathbf{x}_1$, является линейной комбинацией элементов $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_k$. Тогда найдутся такие числа μ_2, ..., μ_k, что справедливо равенство (7.3). Это равенство можно переписать в виде

$$(-1)\mathbf{x}_1 + \mu_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \mu_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}, \tag{7.4}$$

но это значит, что элементы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_k$ линейно зависимы, поскольку один из коэффициентов -1, μ_2, ..., μ_k отличен от нуля.

Теорема доказана. □

§ 7.3. Базис линейного пространства. Координаты элемента

Пусть L — произвольное линейное пространство.

Определение 7.3. Линейно независимая система элементов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ пространства L называется *базисом* этого пространства, если любой элемент $\mathbf{x}$ пространства L является линейной комбинацией этих элементов, то есть:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + x_n \mathbf{e}_n, \tag{7.5}$$

где x_1, x_2, ..., x_n — некоторые числа, называемые *координатами* элемента $\mathbf{x}$ относительно базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$.

Равенство (7.5) называется *разложением элемента* $\mathbf{x}$ *по базису* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$.

Пример 7.6. В линейном пространстве всех векторов плоскости (пример 7.1) любые два неколлинеарные вектора являются базисом этого пространства (см. теоремы 3.3 и 3.4).

Пример 7.7. В линейном пространстве всех векторов пространства любые три некомпланарные вектора являются базисом этого пространства (см. теорему 3.5).

Пример 7.8. Для линейного пространства всех решений однородной системы линейных уравнений (2.15) базисом служит

фундаментальная система решений этой системы (см. определение 2.1).

Теорема 7.2. *Любой элемент* $\mathbf{x}$ *линейного пространства* L *разлагается по базису* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ *этого пространства единственным способом.*

Доказательство. Предположим обратное, пусть элемент $\mathbf{x}$ разлагается по базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ двумя различными способами:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, \tag{7.6}$$

и

$$\mathbf{x} = x'_1\mathbf{e}_1 + x'_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x'_n\mathbf{e}_n. \tag{7.7}$$

Вычитая из равенства (7.6) равенство (7.7), получим

$$(x_1 - x'_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 - x'_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + (x_n - x'_n)\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Но последнее равенство, в силу линейной независимости базисных элементов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$, справедливо тогда и только тогда, когда $x_1 - x'_1 = 0$, $x_2 - x'_2 = 0$, ..., $x_n - x'_n = 0$, или

$$x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_2, \quad \ldots, \quad x_n = x'_n.$$

Теорема доказана. □

Пусть элементы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейного пространства L разложены по базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n,$$

и

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n.$$

Из этих равенств, в силу аксиом $1^\circ)$–$8^\circ)$ линейного пространства (см. определение 7.1), получим

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 + y_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + (x_n + y_n)\mathbf{e}_n, \tag{7.8}$$

и

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1)\mathbf{e}_1 + (\lambda x_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + (\lambda x_n)\mathbf{e}_n. \tag{7.9}$$

Равенство (7.8) означает, что *при сложении двух элементов линейного пространства* L *их координаты* (*относительно данного базиса*) *складываются.*

Равенство же (7.9) означает, что *при умножении элемента линейного пространства* L *на некоторое число* λ *координаты этого элемента умножаются на* λ.

§ 7.4. Размерность линейного пространства

Определение 7.4. Если линейное пространство L имеет базис, состоящий из n элементов, то это число n называется *размерностью* линейного пространства L, а само пространство L называется *n-мерным линейным* или *векторным пространством*.

Размерность линейного пространства L обозначается через $\dim L$.

Линейное пространство, в котором не существует базис, называется *бесконечномерным*.

Корректность этого определения следует из следующей важной теоремы, доказательство которой можно найти в любом учебнике по линейной алгебре.

Теорема 7.3. *В линейном пространстве любые два базиса содержат одинаковое число элементов.*

Размерность линейного пространства всех векторов плоскости равна двум (см. пример 7.6).

Размерность линейного пространства всех векторов пространства равна трем.

Размерность линейного пространства $\mathbf{R}^n$ (пример 7.2) *равна* n.

Для этого достаточно доказать, что n *элементов*

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \\ &\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned} \tag{7.10}$$

являются базисом линейного пространства $\mathbf{R}^n$.

Сначала заметим, что элементы (7.10) линейно независимы, поскольку равенство

$$\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \mathbf{0}$$

справедливо тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Теперь докажем, что произвольный элемент $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространства $\mathbf{R}^n$ линейно выражается через элементы (7.10). Это тоже очевидно, поскольку

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Элементы (7.10) называются *естественным базисом* n-мерного линейного пространства $\mathbf{R}^n$.

Размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений (2.15) *равна* $(n - \operatorname{rang} A)$, *где* A — *матрица этой системы, а* n — *число неизвестных* (см. теорему 2.6).

Теперь приведем без доказательства критерий n-мерности линейного пространства L.

Теорема 7.4. *Линейное пространство* L *является* n*-мерным тогда и только тогда, когда*

1) *в нем существует* n *линейно независимых элементов,*
2) *любое* $(n+1)$ *элементов этого пространства являются линейно зависимыми.*

Условия 1) и 2) этой теоремы часто принимают как определение n-мерного линейного пространства.

Используя последнюю теорему покажем, что *линейное пространство* $C[a,b]$ *всех непрерывных на отрезке* $[a,b]$ *функций* $x = x(t)$ (см. пример 7.3) *является примером бесконечномерного пространства*.

Для этого достаточно доказать, что система из $(n+1)$ элементов (функций) 1, t, t^2, …, t^n, где n — произвольное натуральное число, линейно независима. А это в самом деле так, поскольку нетривиальная линейная комбинация этих функций есть многочлен

$$C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \ldots + C_n t^n,$$

который не может тождественно равняться нулю на отрезке $[a,b]$.

§ 7.5. Изоморфизм линейных пространств

Сначала напомним понятие взаимно однозначного отображения или соответствия между множествами.

Пусть X и Y произвольные непустые множества.

Определение 7.5. Отображение $\varphi : X \to Y$ называется *взаимно однозначным* или *биективным*, если выполняются следующие условия:

1) если x и x' — произвольные элементы множества X и $x \neq x'$, то $\varphi(x) \neq \varphi(x')$;
2) для произвольного элемента y множества Y существует единственный элемент x множества X, что $\varphi(x) = y$.

Другими словами, отображение $\varphi : X \to Y$ называется взаимно однозначным, если каждому элементу $x \in X$ этим отображением сопоставляется один и только один элемент $y = \varphi(x) \in Y$, причем каждый элемент $y \in Y$ соответствует единственному элементу $x \in X$.

Нетрудно проверить, что если отображение $\varphi : X \to Y$ — взаимно однозначное, то обратное отображение $\varphi^{-1} : Y \to X$ также является взаимно однозначным.

Теперь сформулируем важное определение, которое позволяет некоторые линейные пространства считать одинаковыми или изоморфными.

Определение 7.6. Линейные пространства L и L' называются *изоморфными*, если существует такое взаимно однозначное отображение $\varphi : L \to L'$, которое удовлетворяет следующим двум условиям:

1) $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$;

2) $\varphi(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\varphi(\mathbf{x})$

для любых элементов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ пространства L и любого числа λ.

В этом случае отображение $\varphi : L \to L'$ называется *изоморфизмом* линейных пространств L и L'.

Нетрудно проверить, что *если* $\varphi : L \to L'$ — *изоморфизм*, *то* $\varphi^{-1} : L' \to L$ *также является изоморфизмом*.

В качестве легкого примера убедимся, что *если* $\varphi : L \to L'$ — *изоморфизм*, *то образ нулевого элемента* $\mathbf{0}$ *пространства* L *совпадает с нулевым элементом* $\mathbf{0}'$ *пространства* L', *то есть* $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$.

Действительно, для произвольного элемента $\mathbf{x}$ пространства L имеем $\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(0 \cdot \mathbf{x}) = 0 \cdot \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}'$.

Теорема 7.5. *Если линейные пространства* L *и* L' *изоморфны*, *то они имеют одинаковую размерность.*

Доказательство. Пусть $\varphi : L \to L'$ — изоморфизм линейных пространств L и L'.

Предположим, что эти пространства имеют разные размерности: $\dim L = n$, $\dim L' = m$ и, скажем, $n > m$.

Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_n$ — некоторый базис пространства L. Обозначим $\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}'_1$, $\varphi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}'_2$, …, $\varphi(\mathbf{e}_n) = \mathbf{e}'_n$ и заметим, что для произвольных чисел λ_1, λ_2, …, λ_n равенство

$$\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0} \tag{7.11}$$

справедливо тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\lambda_1\mathbf{e}'_1 + \lambda_2\mathbf{e}'_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}'_n = \mathbf{0}', \tag{7.12}$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой элемент пространства L, а $\mathbf{0}'$ — нулевой элемент пространства L'.

Линейная независимость базисных элементов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ означает, что равенство (7.11), а, стало быть, и равенство (7.12), выполняется тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Итак, в пространстве L' мы нашли n линейно независимых элементов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$, что противоречит условию $\dim L' = m < n$.

Теорема доказана. □

Верно и обратное утверждение последней теоремы.

Теорема 7.6. *Любые два n-мерных линейных пространства L и L' изоморфны друг другу.*

Доказательство. Пусть $\dim L = \dim L' = n$.

Рассмотрим произвольные базисы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ пространства L и $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$ пространства L'.

Возьмем любой элемент $\mathbf{x}$ пространства L и разложим его по базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, \tag{7.13}$$

где x_1, x_2, ..., x_n — координаты элемента $\mathbf{x}$ относительно данного базиса.

Теперь определим отображение $\varphi : L \to L'$ по формуле

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{e}'_1 + x_2\mathbf{e}'_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}'_n. \tag{7.14}$$

Иначе говоря, отображением φ каждому элементу $\mathbf{x}$ пространства L ставится в соответствие элемент $\mathbf{x}' = \varphi(\mathbf{x})$ пространства L', который имеет относительно базиса $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$ те же самые координаты, что и элемент $\mathbf{x}$ относительно базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$.

Отображение $\varphi : L \to L'$ является взаимно однозначным в силу единственности разложений (7.13) и (7.14) (см. теорему 7.2). Это отображение удовлетворяет также условиям $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$ и $\varphi(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\varphi(\mathbf{x})$ в силу формул (7.8) и (7.9).

Итак $\varphi : L \to L'$ — изоморфизм линейных пространств L и L'.

Теорема доказана. □

Замечание 7.1. Из последней теоремы, в частности, следует, что *любое n-мерное линейное пространство L изоморфно*

вещественному n-мерному векторному пространству $\mathbf{R}^n$ (см. пример 7.2).

Заметим, что отображение, которое каждому элементу $\mathbf{x}$ пространства L ставит в соответствие совокупность n вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, состоящая из координат элемента $\mathbf{x}$ относительно заданного базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ пространства L, является изоморфизмом линейных пространств L и $\mathbf{R}^n$.

Это замечание позволяет, в случае необходимости, вместо произвольного n-мерного линейного пространства L рассматривать вещественное n-мерное векторное пространство $\mathbf{R}^n$.

Объединяя теоремы 7.5 и 7.6, получаем, что *конечномерные линейные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.*

§ 7.6. Переход от одного базиса к другому. Формулы преобразования координат

Пусть

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \tag{7.15}$$

и

$$\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n \tag{7.16}$$

— два произвольных базиса n-мерного линейного пространства $\mathbf{R}^n$.

Элементы (7.16) разложим по базису (7.15):

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{1n}\mathbf{e}_n, \\
\mathbf{e}'_2 &= a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{2n}\mathbf{e}_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{e}'_n &= a_{n1}\mathbf{e}_1 + a_{n2}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{e}_n.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{7.18}$$

Матрица A называется *матрицей перехода* от базиса (7.15) к базису (7.16).

Заметим сразу, что определитель матрицы A отличен от нуля, поскольку базисные элементы (7.16), а стало быть, и строки матрицы A, линейно независимы (см. теорему 1.11).

Рассмотрим теперь произвольный элемент $\mathbf{x}$ пространства $\mathbf{R}^n$. Предположим, что элемент $\mathbf{x}$ в базисе (7.15) имеет координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а в базисе (7.16) — координаты $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$. Здесь возникает естественный вопрос: *как связаны между собой эти координаты, если переход от базиса* (7.15) *к базису* (7.16) *осуществляется формулами* (7.17).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7.7. *Координаты* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ *элемента* $\mathbf{x}$*, соответственно, в базисах* (7.15) *и* (7.16)*, связаны формулами*

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + \ldots + a_{n1}x'_n, \\ x_2 &= a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + \ldots + a_{n2}x'_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_{1n}x'_1 + a_{2n}x'_2 + \ldots + a_{nn}x'_n. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Доказательство. Элемент $\mathbf{x}$ разложим по базисам (7.15) и (7.16):

$$\mathbf{x} = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + \ldots + x'_n\mathbf{e}'_n = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n.$$

В последнем равенстве вместо элементов $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ подставив их выражения, определяемые формулами (7.17), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + \ldots + x'_n\mathbf{e}'_n = \\ &= x'_1(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{1n}\mathbf{e}_n) + \\ &\qquad + x'_2(a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{2n}\mathbf{e}_n) + \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots + x'_n(a_{n1}\mathbf{e}_1 + a_{n2}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{e}_n) = \\ &= (a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + \ldots + a_{n1}x'_n)\mathbf{e}_1 + \\ &\qquad + (a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + \ldots + a_{n2}x'_n)\mathbf{e}_2 + \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots + (a_{1n}x'_1 + a_{2n}x'_2 + \ldots + a_{nn}x'_n)\mathbf{e}_n = \\ &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

Из последнего равенства и следуют формулы (7.19).

Теорема доказана. □

Формулы (7.19) называются *формулами преобразования координат* элемента линейного пространства $\mathbf{R}^n$ при переходе от одного базиса к другому.

Если координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представить в виде вектор-столбца $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, а координаты $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ — в виде $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdots \\ x'_n \end{pmatrix}$, то формулы преобразования (7.19) можно переписать в матричной форме

$$X = A'X', \tag{7.20}$$

где A' — матрица, транспонированная к матрице A.

Поскольку определитель матрицы A' отличен от нуля (ведь $|A| \neq 0$), то, как следует из (7.20), координаты $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ можно выразить через координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с помощью матричной формулы

$$X' = (A')^{-1}X. \tag{7.21}$$

Итак, *если переход от базиса* (7.15) *к базису* (7.16) *осуществляется с помощью невырожденной матрицы* A (см. (7.17)), *то переход от координат любого элемента относительно базиса* (7.15) *к координатам этого же элемента относительно базиса* (7.16) *осуществляется с помощью матрицы* $(A')^{-1}$ (см. (7.21)).

§ 7.7. Определение евклидова пространства. Примеры

Определение 7.7. Говорят, что в вещественном линейном пространстве L задано *скалярное произведение*, если любым двум элементам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ пространства L с помощью определенного закона поставлено в соответствие некоторое действительное число, обозначаемое символом $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ или $\mathbf{xy}$, так, что выполняются следующие четыре аксиомы:

1°. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (свойство коммутативности);

2°. $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$ (свойство дистрибутивности);

3°. $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, где λ — произвольное действительное число (свойство однородности);

4°. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant 0$, причем равенство нулю выполняется лишь в случае $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (свойство положительной определенности).

Число $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ называется *скалярным произведением* элементов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Определение 7.8. Линейное пространство L, в котором задано скалярное произведение, называется *евклидовым пространством*.

Пример 7.9. В линейном пространстве всех векторов плоскости (пространства) было определено скалярное произведение формулой (3.26). Справедливость аксиом 1°–4° было доказано в теореме 3.13.

Итак, пространство всех векторов плоскости (пространства) является примером евклидового пространства.

Пример 7.10. В вещественном n-мерном линейном пространстве $\mathbf{R}^n$ (см. пример 7.2) скалярное произведение двух произвольных элементов (векторов) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ определим формулой

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n. \tag{7.22}$$

Справедливость аксиом 1°–4° для так определенного скалярного произведения проверяется без особого труда.

Итак, вещественное линейное пространство $\mathbf{R}^n$ со скалярным произведением (7.22) является евклидовым пространством.

Пример 7.11. В линейном пространстве $C[a, b]$ всех непрерывных на некотором отрезке $[a, b]$ функций определим скалярное произведение двух произвольных функций $f(x)$ и $g(x)$ этого пространства формулой

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx. \tag{7.23}$$

Можно проверить, что так определенное скалярное произведение в самом деле удовлетворяет аксиомам 1°–4°.

§ 7.8. Неравенство Коши–Буняковского

Пусть L — произвольное евклидово пространство.

Теорема 7.8. *Для любых двух элементов x и y евклидова пространства L справедливо неравенство*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{y}), \tag{7.24}$$

называемое неравенством Коши–Буняковского.

Доказательство. Согласно аксиоме 4° скалярного произведения (см. определение 7.7), справедливо равенство

$$(\lambda\mathbf{x}-\mathbf{y},\lambda\mathbf{x}-\mathbf{y})\geqslant 0,$$

где λ — произвольное действительное число.

В силу аксиом 1°–3° скалярного произведения, последнее неравенство можно переписать в виде

$$\lambda^2(\mathbf{x},\mathbf{x})-2\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{y},\mathbf{y})\geqslant 0, \tag{7.25}$$

что есть квадратное неравенство относительно λ.

Неравенство (7.25) справедливо тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного трехчлена не является положительным, то есть

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})^2-(\mathbf{x},\mathbf{x})\cdot(\mathbf{y},\mathbf{y})\leqslant 0.$$

Из этого неравенства и следует неравенство Коши–Буняковского (7.24).

Теорема доказана. □

Теперь выясним, как выглядит неравенство Коши–Буняковского в конкретных евклидовых пространствах.

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ (см. пример 7.10), где скалярное произведение двух произвольных элементов $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ задается формулой (7.22). Эту формулу перепишем в следующем кратком виде:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i. \tag{7.26}$$

Так как

$$(\mathbf{x},\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

а

$$(\mathbf{y},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}y_i^2,$$

то неравенство Коши–Буняковского (7.24) в рассматриваемом евклидовом пространстве примет вид

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right). \tag{7.27}$$

Нетрудно заметить, что неравенство Коши–Буняковского (7.24) в евклидовом пространстве $C[a,b]$ всех непрерывных

на отрезке $[a, b]$ функций со скалярным произведением (7.23) (см. пример 7.11) имеет вид

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx. \tag{7.28}$$

Это неравенство имеет большое применение в различных областях математического анализа.

§ 7.9. Длина элемента и угол между элементами в евклидовом пространстве

С помощью скалярного произведения в любом евклидовом пространстве можно определить понятия *длины* элемента и *угла* между элементами.

Определение 7.9. *Длиной* элемента $\mathbf{x}$ евклидова пространства L называется число

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}\,. \tag{7.29}$$

Определение 7.10. *Углом* между элементами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства L называется угол φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, косинус которого определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|}. \tag{7.30}$$

Учитывая (7.29), формулу (7.30) можно переписать в виде

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \cdot \sqrt{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}}. \tag{7.31}$$

Заметим, что последнее определение корректно, поскольку в силу неравенства Коши–Буняковского (7.24) имеем

$$\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{y})} \leqslant 1,$$

откуда и следует, что правая часть формулы (7.31) по модулю не превосходит единицы.

Согласно (7.29) и (7.30), для длины вектора (элемента) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и угла между векторами $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ n-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ получим следующие формулы:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,, \tag{7.32}$$

$$\cos\varphi = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}}. \tag{7.33}$$

Теорема 7.9. *Для любых двух элементов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *евклидова пространства* L *справедливо неравенство*

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|, \tag{7.34}$$

называемое неравенством треугольника.

Доказательство. Применяя формулу (7.29), свойства скалярного произведения и неравенство Коши–Буняковского (7.24), вычислим квадрат длины элемента $\mathbf{x} + \mathbf{y}$:

$$\begin{aligned}|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leqslant \\ \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \\ = |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2.\end{aligned}$$

Из полученного неравенства $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 \leqslant (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2$ и следует неравенство треугольника (7.34).

Теорема доказана □

В n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ неравенство треугольника (7.34) принимает следующий вид:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\,. \tag{7.35}$$

§ 7.10. Ортогональные элементы. Ортонормированный базис

Рассмотрим произвольное евклидово пространство L.

Определение 7.11. Элементы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства L называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Заметим, что если элементы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны, то косинус угла φ между ними равен нулю и, следовательно, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Если элементы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны, то элемент $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ естественно называть *гипотенузой* прямоугольного треугольника, построенного на элементах $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. И тогда

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{y},\mathbf{y}) = \\ = (\mathbf{x},\mathbf{x}) + (\mathbf{y},\mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2.$$

Тем самым, мы доказали *теорему Пифагора*: *квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов*.

Равенство

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$$

можно обобщить и на n попарно ортогональных элементов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_n$:

$$|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_n|^2 = |\mathbf{x}_1|^2 + |\mathbf{x}_2|^2 + \ldots + |\mathbf{x}_n|^2.$$

Определение 7.12. Говорят, что элементы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_n$ n-мерного евклидова пространства L образуют *ортонормированный базис*, если эти элементы попарно ортогональны и длина каждого из них равна единице, то есть, если

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \tag{7.36}$$

Корректность последнего определения будет обеспечена, если покажем, что элементы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_n$, входящие в это определение, действительно образуют базис n-мерного евклидова пространства L. Для этого достаточно доказать, что эти элементы линейно независимы, т. е. что равенство

$$\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0} \tag{7.37}$$

выполняется, лишь в случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

В самом деле, умножая равенство (7.37) скалярно на элемент $\mathbf{e}_i$ и учитывая соотношения (7.36), получим $\lambda_i = 0$ для произвольного $i = 1, 2, \ldots, n$.

Сформулируем без доказательства следующую важную теорему.

Теорема 7.10. *Во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Пример 7.12. Нетрудно проверить, что в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ (см. пример 7.10) элементы

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \\ &\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned} \tag{7.38}$$

образуют ортонормированный базис.

Глава 8

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 8.1. Понятие линейного оператора. Действия над линейными операторами

Пусть L — n-мерное линейное пространство.

Определение 8.1. Отображение $\mathcal{A} : L \to L$ называется *линейным оператором*, если выполняются следующие свойства:

1°. $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2)$ (свойство аддитивности),

2°. $\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathcal{A}(\mathbf{x})$ (свойство однородности),

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ — произвольные элементы пространства L, а λ — любое действительное число.

Часто вместо $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ будем писать $\mathcal{A}\mathbf{x}$, если, конечно, это не приводит к недоразумениям.

Линейный оператор $\mathcal{A} : L \to L$ называют также *линейным преобразованием* пространства L.

Множество всех линейных операторов из L в L обозначим через $\mathrm{Oper}\,(L, L)$.

Очевидными примерами линейных операторов служат *тождественный* или *единичный* оператор $\mathcal{I}$, действующий по правилу

$$\mathcal{I}\mathbf{x} = \mathbf{x} \tag{8.1}$$

для любого $\mathbf{x} \in L$, и *нулевой* оператор $\mathcal{O}$, который все элементы пространства L отображает в его нулевой элемент $\mathbf{0}$:

$$\mathcal{O}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{8.2}$$

для любого $\mathbf{x} \in L$.

В множестве всех линейных операторов естественным образом определяются *сумма* двух операторов и *умножение* оператора на число.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — два линейных оператора, действующих из L в L.

Определение 8.2. *Суммой* линейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется оператор $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, определяемый равенством

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathbf{x}=\mathcal{A}\mathbf{x}+\mathcal{B}\mathbf{x} \tag{8.3}$$

для произвольного элемента $\mathbf{x}\in L$.

Определение 8.3. *Произведением* линейного оператора $\mathcal{A}$ на число λ называется оператор $\lambda\mathcal{A}$, определяемый равенством

$$(\lambda\mathcal{A})\mathbf{x}=\lambda(\mathcal{A}\mathbf{x}) \tag{8.4}$$

для произвольного элемента $\mathbf{x}\in L$.

Линейный оператор $-\mathcal{A}=(-1)\mathcal{A}$ называется *противоположным* к оператору $\mathcal{A}$.

Нетрудно проверить, что *множество* $\operatorname{Oper}(L,L)$ *всех линейных операторов из* L *в* L *с указанными выше операциями суммы двух операторов и произведения оператора на число образует линейное пространство*.

§ 8.2. Матрица линейного оператора

Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_n$ — некоторый базис n-мерного линейного пространства L, а $\mathcal{A}$ — линейный оператор из $\operatorname{Oper}(L,L)$.

Возьмем произвольный элемент $\mathbf{x}\in L$ и разложим его по данному базису:

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\ldots+x_n\mathbf{e}_n. \tag{8.5}$$

Предположим, что

$$\mathcal{A}\mathbf{x}=\mathbf{y}=y_1\mathbf{e}_1+y_2\mathbf{e}_2+\ldots+y_n\mathbf{e}_n. \tag{8.6}$$

Из разложения (8.5) следует равенство

$$\mathcal{A}\mathbf{x}=x_1\mathcal{A}\mathbf{e}_1+x_2\mathcal{A}\mathbf{e}_2+\ldots+x_n\mathcal{A}\mathbf{e}_n, \tag{8.7}$$

откуда и можно сделать вывод, что *значение* $\mathcal{A}\mathbf{x}$ *однозначно определяется элементами* $\mathcal{A}\mathbf{e}_1$, $\mathcal{A}\mathbf{e}_2,\ldots,\mathcal{A}\mathbf{e}_n$.

Элементы $\mathcal{A}\mathbf{e}_1,\mathcal{A}\mathbf{e}_2,\ldots,\mathcal{A}\mathbf{e}_n$ разложим по базису $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\mathbf{e}_1&=a_{11}\mathbf{e}_1+a_{21}\mathbf{e}_2+\ldots+a_{n1}\mathbf{e}_n,\\
\mathcal{A}\mathbf{e}_2&=a_{12}\mathbf{e}_1+a_{22}\mathbf{e}_2+\ldots+a_{n2}\mathbf{e}_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathcal{A}\mathbf{e}_n&=a_{1n}\mathbf{e}_1+a_{2n}\mathbf{e}_2+\ldots+a_{nn}\mathbf{e}_n.
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Подставляя эти значения в равенство (8.7), получим

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{x} &= x_1(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n1}\mathbf{e}_n) + \\ &\quad + x_2(a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n2}\mathbf{e}_n) + \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + x_n(a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{e}_n) = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)\mathbf{e}_1 + \\ &\quad + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n)\mathbf{e}_2 + \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n)\mathbf{e}_n.\end{aligned}$$

Полученное разложение элемента $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ сравнивая с (8.6), получим

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Теперь рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{8.10}$$

Из формул (8.9) следует, что координаты элемента $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$ получаются в результате умножения матрицы A на координатный столбец элемента $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$:

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}. \tag{8.11}$$

Замечание 8.1. Формула (8.11) означает, что *в выбранном базисе действие любого линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathrm{Oper}\,(L, L)$ сводится к умножению соответствующей матрицы A на координатный столбец элемента.*

Матрица A называется *матрицей линейного оператора* $\mathcal{A}$.

Еще раз напомним, как образуется матрица A линейного оператора $\mathcal{A}$: первый столбец является координатным столбцом образа первого базисного вектора, $\mathcal{A}\mathbf{e}_1$, второй столбец — координатным столбцом образа второго базисного вектора, $\mathcal{A}\mathbf{e}_2$, и т. д. (сравните (8.8) и (8.10)).

Итак, *при заданном базисе каждому линейному оператору* $\mathcal{A} \in \mathrm{Oper}\,(L, L)$ *соответствует матрица* A *этого оператора*.

Естественно возникает обратный вопрос: *каждой ли квадратной матрице* A *порядка* n *при заданном базисе в* L *соответствует оператор* $\mathcal{A} \in \mathrm{Oper(L, L)}$*, матрица которого совпадает с* A.

Покажем, что ответ на этот вопрос утвердительный. Более того, искомый оператор — единственный.

Пусть A — произвольная квадратная матрица порядка n (см. (8.10)), а $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ — некоторый базис n-мерного линейного пространства L.

Заметим, что для определения искомого оператора $\mathcal{A} \in \in \mathrm{Oper(L, L)}$ достаточно определить его значения на базисных элементах формулами (8.8) и задать его значения на произвольном элементе $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \in L$ формулой (8.7).

Очевидно, что так построенный линейный оператор $\mathcal{A}$ — единственный (ведь с помощью формул (8.8) значения оператора $\mathcal{A}$ на базисных элементах определяются единственным образом) и матрицей этого оператора является матрица A.

Итак, мы доказали, что *в* n*-мерном линейном пространстве* L *при заданном базисе* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ *каждому линейному оператору* $\mathcal{A} \in \mathrm{Oper}\,(L, L)$ *однозначно соответствует некоторая матрица* A, *и, обратно, каждой матрице* A *однозначно соответствует некоторый линейный оператор* $\mathcal{A} \in \in \mathrm{Oper}\,(L, L)$, *определяемый формулами* (8.8) *и* (8.7).

Пример 8.1. Матрица нулевого оператора $\mathcal{O}$ (см. (8.1)) является нулевой в любом базисе, т. е. если $\mathcal{A} = \mathcal{O}$, то $A = O$, где O — нулевая матрица.

Пример 8.2. Матрица единичного оператора $\mathcal{I}$ (см. (8.2)) является единичной в любом базисе, так как $\mathcal{I}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Итак, если $\mathcal{A} = \mathcal{I}$, то $A = E$, где E — единичная матрица.

Замечание 8.2. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — произвольные операторы из $\mathrm{Oper}\,(L, L)$, а A и B — матрицы этих операторов в заданном базисе пространства L. Тогда, как нетрудно заметить, матрицей

оператора $\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B}$ в заданном базисе будет матрица $A+\lambda B$, где λ — произвольное число.

Верно и обратное: если A и B — квадратные матрицы порядка n, а $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — соответствующие им линейные операторы в заданном базисе пространства L, то в этом базисе матрице $A+\lambda B$ будет соответствовать оператор $\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B}$.

§ 8.3. Преобразование матрицы линейного оператора при изменении базиса

В предыдущем параграфе было установлено, что если в линейном пространстве L выбран некоторый базис, то каждому линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица этого оператора A. Однако если выбрать в пространстве L другой базис, то матрица линейного оператора $\mathcal{A}$, как правило, станет другой. Выясним, как эти матрицы связаны между собой, или как изменяется матрица линейного оператора при переходе от одного базиса к другому.

Пусть L — n-мерное линейное пространство,

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \tag{8.12}$$

и

$$\widetilde{\mathbf{e}}_1, \widetilde{\mathbf{e}}_2, \ldots, \widetilde{\mathbf{e}}_n \tag{8.13}$$

— два произвольных базиса этого пространства.

Пусть

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{e}}_1 &= s_{11}\mathbf{e}_1 + s_{12}\mathbf{e}_2 + \ldots + s_{1n}\mathbf{e}_n,\\
\widetilde{\mathbf{e}}_2 &= s_{21}\mathbf{e}_1 + s_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + s_{2n}\mathbf{e}_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\widetilde{\mathbf{e}}_n &= s_{n1}\mathbf{e}_1 + s_{n2}\mathbf{e}_2 + \ldots + s_{nn}\mathbf{e}_n,
\end{aligned} \tag{8.14}$$

— формулы перехода от базиса (8.12) к базису (8.13).

Рассмотрим невырожденную матрицу

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} & \cdots & s_{n1} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{1n} & s_{2n} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}, \tag{8.15}$$

транспонированную к матрице перехода от базиса (8.12) к базису (8.13) (см. § 7.6).

Пусть теперь $\mathcal{A}$ — произвольный оператор из $\mathrm{Oper}\,(L, L)$. Матрицы этого оператора в базисах (8.12) и (8.13) соответственно обозначим через A и $\widetilde{A}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 8.1. *Матрицы A и $\widetilde{A}$ линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисах* (8.12) *и* (8.13), *соответственно, связаны соотношением*

$$\widetilde{A} = S^{-1}AS, \tag{8.16}$$

где S^{-1} — обратная матрица невырожденной матрицы S.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $\mathbf{x}$ линейного пространства L и предположим, что оператор $\mathcal{A}$ элемент $\mathbf{x}$ отображает на элемент $\mathbf{y}$: $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — координаты элементов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, соответственно, в базисе (8.12), а $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n)$ и $(\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_n)$ — координаты этих же элементов в базисе (8.13).

Рассмотрим координатные столбцы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \widetilde{X} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \\ \cdots \\ \widetilde{x}_n \end{pmatrix}, \quad \widetilde{Y} = \begin{pmatrix} \widetilde{y}_1 \\ \widetilde{y}_2 \\ \cdots \\ \widetilde{y}_n \end{pmatrix}.$$

В силу матричной формы (7.20) формул преобразований координат имеем соотношения

$$X = S\widetilde{X} \tag{8.17}$$

и

$$Y = S\widetilde{Y}. \tag{8.18}$$

С другой стороны, согласно формуле (8.11), справедливы равенства

$$AX = Y \tag{8.19}$$

и

$$\widetilde{A}\widetilde{X} = \widetilde{Y}. \tag{8.20}$$

Подставляя равенства (8.17) и (8.18) в (8.19), получим

$$(AS)\widetilde{X} = S\widetilde{Y},$$

откуда находим

$$(S^{-1}AS)\widetilde{X} = \widetilde{Y},$$

или, учитывая формулу (8.20),

$$(S^{-1}AS)\widetilde{X} = \widetilde{A}\widetilde{X}.$$

Из последнего равенства и следует требуемое соотношение $\widetilde{A} = S^{-1}AS$.

Теорема доказана. □

Замечание 8.3. Умножая обе части матричного равенства (8.16) слева на матрицу S, а справа — на S^{-1}, получим соотношение

$$A = S\widetilde{A}S^{-1}, \tag{8.21}$$

представляющее собой другую форму связи между матрицами A и $\widetilde{A}$ линейного оператора $\mathcal{A}$ в разных базисах.

§ 8.4. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Пусть L — n-мерное линейное пространство, а $\mathcal{A}$ — линейный оператор из $\mathrm{Oper}\,(L, L)$.

Определение 8.4. Ненулевой вектор $\mathbf{x} \in L$ называется *собственным вектором* линейного оператора $\mathcal{A}$, если существует такое число λ, что

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{8.22}$$

При этом число λ называется *собственным значением* оператора $\mathcal{A}$.

Если выполняется равенство (8.22), то говорят также, что $\mathbf{x} \in L$ есть собственный вектор линейного оператора $\mathcal{A}$, соответствующий собственному значению λ.

Совокупность всех собственных значений линейного оператора $\mathcal{A}$ называется *спектром* этого оператора.

Теорема 8.2. *Пусть* $\mathbf{x}$ *— собственный вектор линейного оператора* $\mathcal{A}$*, соответствующий собственному значению* λ*, и пусть* $\alpha \neq 0$ *— произвольное число. Тогда вектор* $\alpha\mathbf{x}$ *также является собственным вектором линейного оператора* $\mathcal{A}$*, соответствующим собственному значению* λ*.*

Доказательство. В самом деле,

$$\mathcal{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathcal{A}\mathbf{x} = \alpha(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\alpha\mathbf{x}),$$

что и требовалось доказать. □

Теперь рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ линейного пространства L.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 8.3. *Число λ является собственным значением оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда это число является корнем уравнения*

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (8.23)$$

где E — единичная матрица.

Доказательство. Пусть λ — собственное значение оператора $\mathcal{A}$, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \neq 0$ — собственный вектор, соответствующий значению λ. Это значит, что справедливо равенство (8.22), или, с учетом замечания 8.1, равенство

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \qquad (8.24)$$

где, в данном случае, $\mathbf{x}$ рассматривается как координатный вектор-столбец: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

В развернутой форме равенство (8.24) имеет вид:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n, \end{aligned}$$

или

$$\begin{array}{ccccccccc} (a_{11}-\lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = 0, \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22}-\lambda)x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = 0, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \ldots + & (a_{nn}-\lambda)x_n & = 0. \end{array} \tag{8.25}$$

Итак, однородная система (8.25) имеет нетривиальное решение x_1, x_2, ..., x_n, что возможно тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы этой системы равен нулю (см. теорему 2.4), т. е. λ является корнем уравнения (8.23).

Пусть теперь λ — корень уравнения (8.23). Из этого следует, что однородная система (8.25) имеет нетривиальное решение x_1, x_2, ..., x_n. Но тогда вектор $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \neq 0$ удовлетворяет равенству (8.24). А это значит, что λ — собственное значение линейного оператора $\mathcal{A}$.

Теорема доказана. □

Замечание 8.4. Определитель $|A - \lambda E|$ представляет собой многочлен степени n относительно λ. Этот многочлен называется *характеристическим многочленом* матрицы A.

Уравнение (8.23) называется *характеристическим уравнением* матрицы A.

Замечание 8.5. Следует отметить, что характеристический многочлен $|A - \lambda E|$ матрицы A линейного оператора $\mathcal{A}$ не зависит от выбора базиса.

Действительно, при переходе к другому базису матрица A переходит в матрицу $\widetilde{A} = S^{-1}AS$ (см. теорему 8.1) и, следовательно, характеристический многочлен матрицы $\widetilde{A}$ линейного оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$|\widetilde{A} - \lambda E| = |S^{-1}AS - \lambda E| =$$
$$= |S^{-1}AS - \lambda S^{-1}ES| = |S^{-1}(A - \lambda E)S|.$$

Но поскольку определитель произведения равен произведению определителей, то

$$|\widetilde{A} - \lambda E| = |S^{-1}(A - \lambda E)S| = |S^{-1}||A - \lambda E||S| = |A - \lambda E|$$

(ведь $|S^{-1}||S| = |S^{-1}S| = |E| = 1$).

Последнее замечание позволяет многочлен $|A - \lambda E|$ называть также *характеристическим многочленом*, а уравнение $|A - \lambda E| = 0$ — *характеристическим уравнением* линейного оператора $\mathcal{A}$.

Теорему 8.3 теперь можно перефразировать следующим образом: *собственными значениями линейного оператора* $\widetilde{A}$ *являются корни его характеристического уравнения* (8.23) *и только они*.

Замечание 8.6. *Каждый линейный оператор имеет собственное значение*, поскольку в силу основной теоремы алгебры характеристическое уравнение (8.23) имеет хотя бы один (вообще говоря, комплексный) корень.

§ 8.5. Матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов

Пусть L — n-мерное линейное пространство, $\mathcal{A}$ — линейный оператор из $\operatorname{Oper}(L, L)$, а A — матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ линейного пространства L.

Теорема 8.4. *Матрица линейного оператора* $\mathcal{A}$ *в базисе* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ *имеет диагональный вид*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{8.26}$$

тогда и только тогда, когда векторы данного базиса являются собственными векторами оператора $\mathcal{A}$, *соответствующими собственным числам* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Доказательство. Пусть базисные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ являются собственными векторами оператора $\mathcal{A}$, соответствующими собственным числам λ_1, λ_2, ..., λ_n:

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}\mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1, \\ &\mathcal{A}\mathbf{e}_2 = \lambda_2 \mathbf{e}_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\mathcal{A}\mathbf{e}_n = \lambda_n \mathbf{e}_n. \end{aligned} \tag{8.27}$$

Эти равенства означают, что матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ имеет диагональный вид (8.26) (см. соотношения (8.8) и (8.10)).

Теперь предположим, что матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ имеет диагональный вид (8.26). Тогда

нетрудно заметить, что равенства (8.8) примут вид (8.27), а это значит, что базисные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ являются собственными векторами оператора $\mathcal{A}$, соответствующими собственным числам λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Теорема доказана. □

Т е о р е м а 8.5. *Пусть собственные значения λ_1, λ_2, ..., λ_k линейного оператора $\mathcal{A}$ различны. Тогда соответствующие им собственные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_k$ линейно независимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим метод математической индукции по числу векторов.

Для $k = 1$ утверждение теоремы очевидно, так как $\mathbf{e}_1$ — ненулевой вектор и является линейно независимым.

Пусть утверждение теоремы доказано для $(m-1)$ векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_{m-1}$ $(m < k)$. Присоединим к этим векторам вектор $\mathbf{e}_m$ и допустим, что имеет место равенство

$$\mu_1\mathbf{e}_1 + \mu_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \mu_{m-1}\mathbf{e}_{m-1} + \mu_m\mathbf{e}_m = \mathbf{0}. \tag{8.28}$$

Применим к обеим частям последнего равенства линейный оператор $\mathcal{A}$. Получим

$$\mu_1\mathcal{A}\mathbf{e}_1 + \mu_2\mathcal{A}\mathbf{e}_2 + \ldots + \mu_{m-1}\mathcal{A}\mathbf{e}_{m-1} + \mu_m\mathcal{A}\mathbf{e}_m = \mathbf{0}. \tag{8.29}$$

Так как $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_k$ — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие собственным значениям λ_1, λ_2, ..., λ_k, то равенство (8.29) можно переписать в виде

$$\mu_1\lambda_1\mathbf{e}_1 + \mu_2\lambda_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \mu_{m-1}\lambda_{m-1}\mathbf{e}_{m-1} + \mu_m\lambda_m\mathbf{e}_m = \mathbf{0}. \tag{8.30}$$

Теперь равенство (8.28) умножим на λ_m и вычтем из последнего равенства. Получим

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_m)\mathbf{e}_1 + \mu_2(\lambda_2 - \lambda_m)\mathbf{e}_2 + \ldots + \mu_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)\mathbf{e}_{m-1} = \mathbf{0}.$$

Так как по индуктивному предположению векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_{m-1}$ линейно независимы, то из последнего равенства следует, что

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_m) = \mu_2(\lambda_2 - \lambda_m) = \ldots = \mu_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) = 0,$$

или

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{m-1} = 0, \tag{8.31}$$

поскольку собственные значения λ_1, λ_2, ..., λ_k различны.

Из равенств (8.28) и (8.31) следует также, что $\mu_m = 0$ (ведь $\mathbf{e}_m \neq \mathbf{0}$).

Итак, мы доказали, что из равенства (8.28) следует $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_m = 0$. Это означает, что векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_m$ линейно независимы.

Теорема доказана. □

Следствие 8.1. *Если характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ имеет n различных корней, то в некотором базисе матрица этого оператора имеет диагональный вид.*

Доказательство. Пусть λ_1, λ_2, ..., λ_n — различные собственные значения оператора $\mathcal{A}$, а $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$, соответствующие им собственные векторы.

В силу последней теоремы эти собственные векторы линейно независимы и поэтому могут быть выбраны в качестве базиса линейного пространства L. Но тогда по теореме 8.4 в этом базисе матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид. □

Список литературы

1. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1979.
2. *Геворкян П.С.* Высшая математика. Основы математического анализа. — М.: Физматлит, 2004.
3. *Геворкян П.С.* Высшая математика. Интегралы, ряды, ТФКП, дифференциальные уравнения. — М.: Физматлит, 2007.
4. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. — М.: Физматлит, 1999.
5. *Постников М.М.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1979.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгебраическая линия n-го порядка, 141
– поверхность n-го порядка, 152
Алгебраическое дополнение, 22
– значение ортогональной проекции, 65
Аффинная система координат в плоскости, 56
– – – в пространстве, 58

Базис линейного пространства, 172
– ортонормированный, 185
Базисный минор, 28

Вектор, 48, 170
–, длина, 48
– единичный, 48
–, конец, 48
–, модуль, 48
–, начало, 48
– нулевой, 48
– противоположный, 49
– свободный, 49
Векторное произведение, 77
– –, свойство антикоммутативности, 77
– –, свойство дистрибутивности, 79
– –, сочетательное свойство, 78
Векторное пространство, 168
– – n-мерное, 170
Векторы коллинеарные, 51
– компланарные, 52
Взаимно однозначное отображение, 175

Гаусса метод, 44
Гипербола, 125
–, вершины, 127
–, действительная полуось, 127
–, директрисы, 127
–, каноническое уравнение, 125
–, линейный эксцентриситет, 127
–, мнимая полуось, 127
–, равнобочная, 125
–, фокальный параметр, 127
–, фокусное расстояние, 127
–, фокусы, 127
–, центр, 127
–, эксцентриситет, 127
Гиперболоид двуполостный, 156
– однополостный, 156
Горловой эллипс, 155

Деление отрезка в данном отношении, 63
Детерминант, 15
Директориальное свойство гиперболы, 132
– – эллипса, 125
Длина вектора, 74, 75
– элемента, 183

Евклидово пространство, 181
Естественный базис, 175

Изоморфизм, 176
Изоморфные линейные пространства, 176
Инвариант уравнения линии второго порядка, 144

Коллинеарные векторы, 51
Компланарные векторы, 52
Конус второго порядка
– действительный, 160
– мнимый, 162
Координата вектора, 55
– точки, 55
Координатная плоскость, 58
Координаты вектора, 56, 58
– точки, 57, 59
– элемента линейного пространства, 172

Левая тройка векторов, 76
Линейная зависимость строк матрицы, 25
– – элементов, 171
Линейная комбинация нетривиальная, 25, 171
– – строк, 25
– – тривиальная, 25, 170
– – элементов, 170
Линейная независимость строк матрицы, 25
– – элементов, 171
Линейное преобразование, 187
Линейное пространство, 168
– n-мерное, 174
– бесконечномерное, 174
Линейный оператор, 187
– нулевой, 187
– тождественный, 187
Линии второго порядка, 141

Матрица, 9
–, базисные столбцы, 28
–, базисные строки, 28
–, вектор-столбец, 9
–, вектор-строка, 9
– верхняя треугольная, 10
– вырожденная, 23
–, главная диагональ, 9
–, диагональная, 10
– диагонального вида, 26
– единичная, 10
– квадратная, 9
– линейного оператора, 190
– невырожденная, 23
– нижняя треугольная, 10
– нулевая, 9
– обратная, 23
– перехода, 178
–, побочная диагональ, 9
– противоположная, 9
-, размерность, 8
– ступенчатого вида, 27
– транспонирования, 9
–, элементарные преобразования, 26
Матрицы эквивалентные, 26
– равные, 8
Метод Гаусса, 44
Минор, 15
– базисный, 28
– k-го порядка, 28
Многочлен
трех переменных, 151
Многочлен от двух переменных, 141

Направляющие косинусы, 71
Направляющий вектор, 85
Неравенство Коши-Буняковского, 181
– треугольника, 184
Нетривиально совместная система, 39
Нормальное уравнение плоскости, 105

Нормальное уравнение прямой, 93
Нормальный вектор плоскости, 99
– – прямой, 90
Нормирующий множитель, 94, 106

Общее решение неоднородной системы, 44
– – однородной системы, 41
Общее уравнение прямой в пространстве, 110
Одночлен двух переменных, 141, 151
Определитель n-го порядка, 15
– второго порядка, 15
– матрицы, 15
Орт, 48
Ортогональная проекция вектора (точки) на ось, 65
Ортогональное преобразование прямоугольной системы координат, 139
Ортогональные элементы, 184
Ортонормированный базис, 185
Основная матрица системы, 32
Ось абсцисс, 56, 58
– аппликат, 58
– ординат, 56, 58
Отношение коллинеарных векторов, 62
Отображение взаимно однозначное, 175

Парабола, 132
–, вершина, 133
–, директриса, 133
–, каноническое уравнение, 132
–, фокальный параметр, 133
–, фокус, 133
–, фокусное расстояние, 133
Параболоид гиперболический, 159
– эллиптический, 158
Параллельный перенос прямоугольной системы координат, 138
Поверхность, 151
–, уравнение, 151
– цилиндрическая, 162
–, направляющая линия, 162
–, образующая, 162
Поворот прямоугольной системы координат, 139
Правая тройка векторов, 76
Правило треугольника, 50
Проекция вектора на прямую вдоль плоскости, 54
– – – параллельно другой прямой, 53
Произведение вектора на число, 51
– линейного оператора на число, 188
– матриц, 13
– матрицы на число, 12
Противоположный оператор, 188
Прямолинейные образующие, 156, 160
Прямоугольная система координат, 64
Пучок прямых, 91

Равенство векторов, 48, 49
Радиус вектор, 57
Размерность линейного пространства, 174
– матрицы, 8
Разность векторов, 50
– матриц, 11
Ранг матрицы, 28
Репер, 55–57

Связка плоскостей, 101

Система линейных уравнений, 31
– – – квадратная, 31
– – –, матричная форма записи, 32
– – – неоднородная, 31
– – – несовместная, 31
– – – однородная, 31
– – –, расширенная матрица, 32
– – –, решение, 31, 32
– – –, совместная, 31
Скалярное произведение, 180
– – двух векторов, 72
Скалярный квадрат вектора, 73
Смешанное произведение, 81
Собственное значение оператора, 193
Собственный вектор оператора, 193
Спектр оператора, 193
Степень многочлена, 141, 151
– одночлена, 141, 151
Сумма векторов, 50
– линейных операторов, 188
– матриц, 11

Теорема Кронекер–Капелли, 32
– о базисном миноре, 29
– об ортогональной классификации линий второго порядка, 149
– об ортогональной классификации поверхностей второго, 166
– Пифагора, 185
Тривиальное решение, 38

Угловой коэффициент, 88
Угол между векторами, 72, 74, 75
– – двумя плоскостями, 107
– – двумя прямыми, 94, 112
Угол между прямой и плоскостью, 113
– – элементами, 183
Уравнение мнимого эллипса, 146
– плоскости в отрезках, 103
– – векторно-параметрическое, 97
– – общее, 99
– – параметрическое, 97
Уравнение прямой в отрезках, 90
– – векторно-параметрическое, 85
– – векторно-параметрическое, 108
– – каноническое, 86, 108
– – общее, 88
– – параметрическое, 86, 108
– – проходящей через две точки, 87, 109
– – с угловым коэффициентом, 88
Уравнение эллипса в полярных координатах, 136
Условие взаимной перпендикулярности векторов, 76
Условие параллельности плоскостей, 107
– – прямой и плоскости, 114
– – прямых, 95, 112
Условие перпендикулярности плоскостей, 107
– – прямой и плоскости, 114
– – прямых, 95, 112

Фокальное свойство гиперболы, 129
– – эллипса, 122
Формула вычисления расстояния между двумя точками, 70
Формулы Крамера, 35
Формулы преобразования координат, 179

Формулы преобразования координат, параллельный перенос, 139
– – –, поворот системы координат, 140
Фундаментальная система решений, 41

Характеристический многочлен, 195
Характеристическое уравнение, 195

Центр линии второго порядка, 144
Цилиндр гиперболический, 164
– круговой, 163
– параболический, 164
– эллиптический
– мнимый, 164
– эллиптический действительный, 163

Эквивалентные матрицы, 26
Элементы матрицы, 8
Эллипс, 119
–, большая полуось, 120
–, вершины, 120
–, директрисы, 120
–, каноническое уравнение, 119
–, линейный эксцентриситет, 120
–, малая полуось, 120
–, фокальный параметр, 120
–, фокусное расстояние, 120
–, фокусы, 120
–, центр, 120
–, эксцентриситет, 120
Эллипсоид
– действительный, 152
– мнимый, 153
–, полуоси, 152